$\boxed{\text{問題:}}$

若 $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ 爲多項式, 且滿足

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x), \tag{1}$$

試證明 $x - 1$ 是 $P(x)$ 的因式.

$\boxed{\text{解答:}}$

因爲 $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$, 所以

$$\begin{aligned} x^5 - 1 &\equiv 0 \pmod{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} \\ \Leftrightarrow x^5 &\equiv 1 \pmod{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} \\ \Leftrightarrow (x^5)^n &\equiv 1^n \pmod{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}, \forall n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow x^{5n} &\equiv 1 \pmod{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

設 $n \in \mathbb{N}$, 對任意多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 恆有

$$\begin{aligned} f(x^5) &= a_n x^{5n} + a_{n-1}x^{5(n-1)} + \cdots + a_1 x^5 + a_0 \\ &\equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} \\ &\equiv f(1) \pmod{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

因此, 由 (1) 的左式, 可得

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) \equiv P(1) + xQ(1) + x^2R(1) \pmod{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1},$$

故 $P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5)$ 除以 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 的餘式爲 $P(1) + xQ(1) + x^2R(1)$.

然而, 因爲 (1) 的右式爲 $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ 的倍式, 所以 $P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5)$ 除以 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 的餘式 $P(1) + xQ(1) + x^2R(1) = 0$ 恆成立, 亦即 $P(1) = Q(1) = R(1) = 0$, 再由因式定理, 可得 “$P(1) = 0 \Rightarrow (x-1) \mid P(x)$”.