$\boxed{\text{問題:}}$

在一單位圓上給定一點 P, 且 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是其內接正 n 邊形的頂點, 試證 $\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \cdots + \overline{PA_n}^2$ 是一常數。

$\boxed{\text{解答:}}$

設此單位圓的圓心爲 O, 則對於 $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
\overline{PA_k}^2 &= \left|\overrightarrow{PA_k}\right|^2 = \overrightarrow{PA_k} \cdot \overrightarrow{PA_k} = \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_k}\right) \cdot \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_k}\right) \\
&= \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_k} \cdot \overrightarrow{OA_k} \\
&= 2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OA_k}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \cdots + \overline{PA_n}^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left(2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OA_k}\right) \\
&= 2n + 2\overrightarrow{PO} \cdot \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}\right) \\
&= 2n + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{0} = 2n + 0 = 2n.
\end{aligned}$$

得證。