$\boxed{\text{問題:}}$

設 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是 n 個不相同的正整數, 且 $n > 1$, 求證

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < 2.$$

$\boxed{\text{解答:}}$

因爲 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是“相異”的正整數, 不失一般性, 可假設 $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$。

先用數學歸納法證明 $a_i \geq i, \forall i = 1, 2, \ldots, n$。

1. 當 $i = 1$ 時, 因爲 a_1 爲正整數, 故 $a_1 \geq 1$ 成立。
2. 假設當 $i = k$ $(k \in \mathbb{N}, 1 \leq k < n)$ 時,$a_k \geq k$ 成立。則當 $i = k+1$ 時, $a_{k+1} > a_k \geq k$, 且因爲 $a_{k+1} \in \mathbb{N}$, 所以 $a_{k+1} \geq k+1$ 亦成立。

由上兩式, 可得 $a_i \geq i, \forall i = 1, 2, \ldots, n$。

因此

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} &\leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\
&< 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\
&= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\
&= 2 - \frac{1}{n} \\
&< 2.
\end{aligned}$$

Q.E.D