

自 $0, 1, 2, \dots, 9$ 可重複選取, 選出 n 個數字排成一列,
 令 $a_n = \underline{\text{“}n \text{ 個數字中, 有偶數個 } 0 \text{ 的排列數”}}$, 則 $\underline{\text{“}n \text{ 個數字中, 有奇數個 } 0 \text{ 的排列數”}}$
 $= 10^n - a_n$, 且遞迴關係式如下,

$$a_1 = 9; \text{ (這是因為 } 0, 1, 2, \dots, 9 \text{ 中, 只有 } 1 \text{ 至 } 9 \text{ 有 } 0 \text{ 個 } 0, \text{ 即偶數個 } 0\text{。)}$$

$$a_n = \text{“首位爲 } 0, \text{ 後面接著的有奇數個 } 0 \text{ 的排列數”} + \text{“首位非 } 0, \text{ 後面接著的有偶數個 } 0 \text{ 的排列數”}$$

$$= 1 \times (10^{n-1} - a_{n-1}) + 9 \times (a_{n-1}) = 10^{n-1} + 8a_{n-1} \quad (\forall n \geq 2)$$

所以, 可以得到

$$a_n = 10^{n-1} + 8a_{n-1} \quad (\forall n \geq 2)$$

$$= 10^{n-1} + 8(10^{n-2} + 8a_{n-2}) \quad (\forall n \geq 2)$$

$$= 10^{n-1} + 10^{n-2} \times 8 + 10^{n-3} \times 8^2 \dots + 10 \times 8^{n-2} + 8^{n-1}a_1 \quad (\forall n \geq 2)$$

$$= 10^{n-1} + 10^{n-2} \times 8 + 10^{n-3} \times 8^2 \dots + 10 \times 8^{n-2} + 8^{n-1} \times 9 \quad (\forall n \geq 2)$$

$$= 10^{n-1} + 10^{n-2} \times 8 + 10^{n-3} \times 8^2 \dots + 10 \times 8^{n-2} + 8^{n-1} \times (1 + 8) \quad (\forall n \geq 2)$$

$$= \{10^{n-1} + 10^{n-2} \times 8 + 10^{n-3} \times 8^2 \dots + 10 \times 8^{n-2} + 8^{n-1}\} + 8^n \quad (\forall n \geq 2)$$

$$= \text{“等比級數, 首項爲 } 10^{n-1}, \text{ 公比爲 } \frac{8}{10}, \text{ 項數爲 } n \text{”} + 8^n$$

$$= \text{剩下的你應該會, 我就不寫了 :p}$$

有寫錯的話, 在跟我說一聲吧。或許還有其它的算法, 可以想想看。