

國立中科實驗高級中學 101 學年度教師甄選 數學科專業知能

一、 單選題：每題 3 分

說明：第 1 至 10 題，每題選出最適當的一個選項，依題號在答案卷上作答，不須寫出計算過程，每題答對得 3 分，答錯不倒扣。

1. 設坐標空間中三條直線 L_1, L_2, L_3 的方程式分別為 $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{6} = \frac{z+4}{8}$;
 $L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+4}{4}$; $L_3: \frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ 。試問下列哪些選項是不正確的？
- (A) L_1 與 L_2 相交 (B) L_2 與 L_3 平行 (C) 三直線 L_1, L_2, L_3 共平面
- (D) 直線 $L: \begin{cases} x=0 \\ \frac{y+3}{4} = \frac{z+4}{-3} \end{cases}$ 與直線 L_1, L_2 皆垂直
- (E) 點 $P(0, -3, -4)$ 與 $Q(0, 0, 0)$ 的距離即為點 P 到 L_3 的最短距離。

答：E

2. 某廠商委託民調機構在甲、乙兩地調查聽過某項產品的居民佔當地居民之百分比（以下簡稱為「知名度」）。結果如下：在 95% 信心水準之下，該產品在甲、乙兩地的知名度之信賴區間分別為 $[0.50, 0.58]$ 、 $[0.08, 0.16]$ 。試問下列哪些選項是正確的？
- (A) 甲地本次的參訪者中，45% 的人聽過該產品
- (B) 此次民調在乙地的參訪人數少於在甲地的參訪人數
- (C) 此次調查結果可解讀為：甲地全體居民中有一半以上的人聽過該產品的機率大於 95%
- (D) 若在乙地以同樣方式進行多次民調，所得知名度有 95% 的機會落在區間 $[0.08, 0.16]$
- (E) 經密集廣告宣傳後，在乙地再次進行民調，並增加參訪人數達原人數的 4 倍，則在 95% 信心水準之下該產品的知名度之信賴區間寬度會減半（即 0.04）

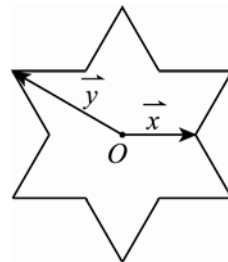
答：B

3. 設 a 為一正實數且滿足 $a^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ 。試問下列哪選項是正確的？

(A) $a^3 = 3$ (B) $\log_{\sqrt{3}} a = \sqrt{3}$ (C) $\log_a 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ (D) $a < 3^{\frac{1}{4}}$ (E) $a < 1$

答：C

4. 將一圓的六個等分點分成兩組相間的三點，它們所構成的兩個正三角形扣除內部六條線段後可以形成一正六角星，如圖所示的正六角星是以原點 O 為中心，其中 \vec{x} ， \vec{y} 分別為原點 O 到兩個頂點的向量。若將原點 O 到正六角星 12 個頂點的向量，都寫成為 $a\vec{x} + b\vec{y}$ 的形式，則 $a+b$ 的最大值為何？



- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6。

答：D

5. 心理學家有時候用數學模式： $L(t) = 100(1 - 10^{-kt})$ 來描述在時間 t 時的學習量 $L(t)$ ，其中 k 為常數。假設有一個學生需要背熟 100 個英文單字，心理學家發現這個學生在 10 分鐘時背熟 10 個單字，根據上述資料，這個學生要花幾分鐘才能背熟 90 個以上的單字？(選出最接近的答案)

- (A) 180 (B) 190 (C) 200 (D) 210 (E) 220

答：E

6. 將自然數 1、2、3、4、5... 依序刪去 2 的倍數、3 的倍數、5 的倍數，其餘次序不變，得一數列 $\langle a_n \rangle = \langle 1, 7, 11, 13, 17, 19, \dots \rangle$ ，則 $a_{100} = ?$

- (A) 313 (B) 343 (C) 373 (D) 403 (E) 433。

答：C

7. 一束光線由點 $A(1, 2, 5)$ 射出，通過球面 $S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$ ，在 xy 平面產生的陰影區域面積為何？

- (A) 25π (B) 16π (C) $\frac{16}{3}\pi$ (D) $\frac{25}{3}\pi$ (E) $\frac{5}{3}\pi$

答：E

8. 在平面坐標中，設直線 $y = 3x - 1$ 的圖形與拋物線 $y = x^2 - 3x + k$ 交於 A、B 兩點，且 $\overline{AB} = 4\sqrt{5}$ ，則 $k = ?$

- (A) 1 (B) 3 (C) $\frac{24}{5}$ (D) 6 (E) $\frac{15}{2}$

答：D

9. 設 $a, b, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ，若 $\frac{699}{900} < \overline{0.abc} < \frac{700}{900}$ ，則 $a + b + c = ?$

- (A) 5 (B) 13 (C) 17 (D) 20 (E) 23。

答：D

10. 求值： $\cos^2 10^\circ + \cos^2 50^\circ - \sin 40^\circ \sin 80^\circ = ?$

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{5}{6}$ 。

答：D

二、 填充題：每題 4 分，共 60 分

說明：第 1 至 15 題，不須寫出計算過程，依題號在答案卷上作答，每題答對得 4 分。

1. 設球面 Γ 的球心在原點，半徑為 1，令 Q 的座標為 $(1, 2, 0)$ ， N 的座標為 $(0, 0, 1)$ ，

S 的座標為 $(0, 0, -1)$ ，設 \overline{NQ} 線段交球面 Γ 於 P 點，求 \overline{PS} 線段與 xy 平面的交點坐標為_____。

答： $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0)$

2. 箱子裡有大小相同的號碼球 120 個，其中 i 號球有 i 個， $i=1, 2, 3, \dots, 15$ ，從箱子裡一直取球（取後放回），每取一球就計算該球之球號與某整數 n 的差的絕對值，使得這些差的期望值為最小，則 n 值=_____。

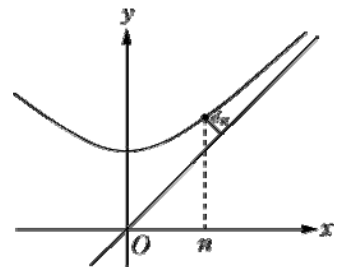
答：11

3. 將『中科實中中部科科第一』十個字重新排成一列，若要求相同字不能相鄰，則排列數=_____。

答：24240

4. 考慮雙曲線 $y^2 - x^2 = 1$ 圖形的上半部（如右圖），取此雙曲線上 x 坐標為 n 的點，此點與漸近線 $y=x$ 的距離記為 d_n ，其中 n 為正整數。則 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot d_n) =$ _____

答： $\frac{\sqrt{2}}{4}$



5. 設四次多項式 $f(x) = -x^4 + x^3 - x^2 + x$ ，選取積分區間 $a \leq x \leq b$ ，使得定積分 $\int_a^b f(x) dx$ 得到最大值，求此最大值為_____。

答： $\frac{13}{60}$

6. 一隻螞蟻在一個正四面體的某一個頂點 A 之上，此時它隨機選擇一個臨近的頂點（每個臨近的頂點 B, C, D 被選中的機率皆為 $1/3$ ），並且在一分鐘之後走到那裡；接著它又隨機選擇一個臨近的頂點，並在一分鐘之後走到那裡。假設這隻螞蟻一直以上述的方式在各個頂點之間走動，那麼在 n 分鐘之後，它的位置恰好在頂點 A 的機率為_____。

答： $\frac{1}{4} [1 + \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}]$

7. 設 $x \neq \pm 1$, $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, 解有理方程式 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x-x^3}{1-3x^2}}{1 - \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{3x-x^3}{1-3x^2}}$, 得 x 的最大值為_____。

答： $\tan 78^\circ$ (或 $\tan \frac{13\pi}{30}$)

8. 設 x 為實數且滿足 $1 \leq x < 2$, 試求滿足方程式 $2x^2 - [2x^2] = 2(x - [x])^2$ 的解, 其個數有多少=_____。(註: $[x]$ 為不大於 x 的最大整數)。

答：3

9. 設 a, b 為正實數, $A = \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{2ab}$, $B = \sqrt{49 + a^2} - 7\sqrt{20}$, $C = \sqrt{64 + b^2} - 8\sqrt{3b}$, 則 $A + B + C$ 之最小值=_____。

答：送分

10. 若多項式 $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^{11}$ 的展開式為 $1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{43}x^{43} + x^{44}$, 試求 $a_6 =$ _____。

答：7887

11. 三次曲線 $y = x^3 + ax^2 + x + 1$, 若由原點可作三條相異之切線, 試求實數 a 的範圍為_____。

答： $a > 3$

12. 設函數 $y = f(x) = \frac{x^2}{1-x}$, 求 $\frac{f^{(6)}(0)}{f^{(4)}(0)} =$ _____。【註： $f^{(n)}(a)$ 表示在 $x=a$ 處的 n 階導數】

答：30

13. 設有一階梯共有 20 階, 每次只能走 2 階或 3 階, 第 8 階階梯壞掉不能踩且必須踩上第 12 階的上樓方法數=_____。

答：32

14. 多項式 $f(x)$, 已知 $\deg f(x) = 98$, $f(k) = \frac{1}{k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, 99$), 試求 $f(100) =$ _____。

答： $\frac{1}{50}$

15. 右圖中，P 為三角形 ABC 內部一點，已知 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{PE}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{PF}} = 2012$ ，

試求 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} \times \frac{\overline{BP}}{\overline{PE}} \times \frac{\overline{CP}}{\overline{PF}} =$ _____。

答：2014

