



和高中生談兩個有趣的立體幾何問題

◎曾憲銳／竹北高中、朱啟台

前言

對於立體幾何的學習，如何將立體圖形平面化，或者，從平面化的圖形想像立體的原貌，可說是一項有趣的挑戰。或許，我們可以一時逃避這項挑戰，透過實體模型或電腦動畫來理解立體模型，但我們通常只得到定性的、概略的感受，而無法進行定量的、精確的分析。模型與動畫雖引起了短暫而表面的學習興趣，卻不見得能得到長遠而深刻的結果。

在這篇文章裏，我們以圓錐截痕與正多面體這兩個經典的立體幾何問題作為例子，希望能引發學生徒手繪圖的興趣，並進一步以自己繪製的圖形為思考的平台，讓三度空間的形體在腦海中飛翔。

圓錐截痕

現行的高中教科書把拋物線、橢圓、雙曲線合稱為圓錐曲線，因為，如果拿平面去切割或砍劈雙圓錐，隨著切割的角度，切出來的痕跡剛好是圓、橢圓、拋物線或雙曲線。但大部分的學生並沒有親自檢驗過這件事的真實性，而只是被告知或被催眠有這麼一回事，我們希望透過紙筆的操作讓學生相信這件事。

我們將以時下一般教科書的定義作為推論的起點，然後證明圓錐截痕剛好是橢圓、雙曲線、或拋物線。

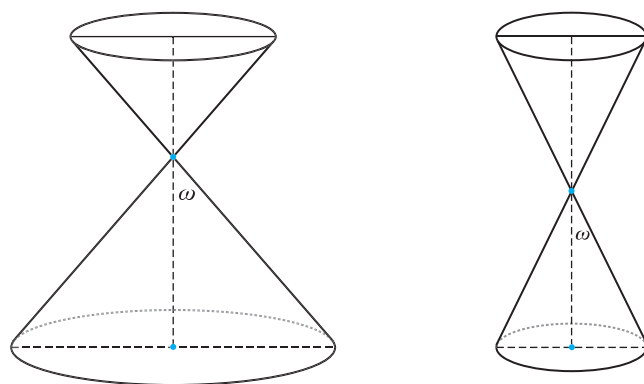
圓錐截痕的定義

橢圓：橢圓上任一點到兩個定點的距離和為定值。

雙曲線：雙曲線上任一點到兩個定點的距離差（一律取正值）為定值。

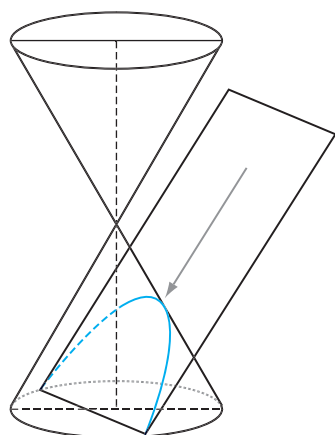
拋物線：拋物線上任一點到定點的距離等於到它到定直線的距離。

讓我們回憶一下雙圓錐的定義：有一個旋轉軸，軸上有一個點，過此點有一條母線，母線繞著軸旋轉一圈，其軌跡就是雙圓錐。旋轉軸與母線的夾角 ω 越小，雙圓錐的頂點就越尖銳。

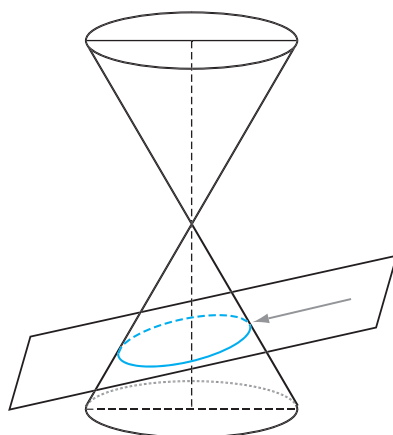


▲圖 1

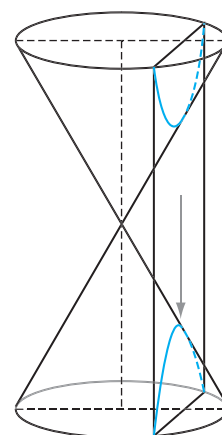
現在，我們拿一個平面來切割雙圓錐。假設切入點的位置不在頂點，而切入的角度最極端的狀況有二：水平的與鉛直的，從水平逐漸變化到鉛直的過程中，有一個切入角度是很特別的，也就是切入方向與母線平行。



▲圖 2



▲圖 3



▲圖 4

以下我們要證明三件事：

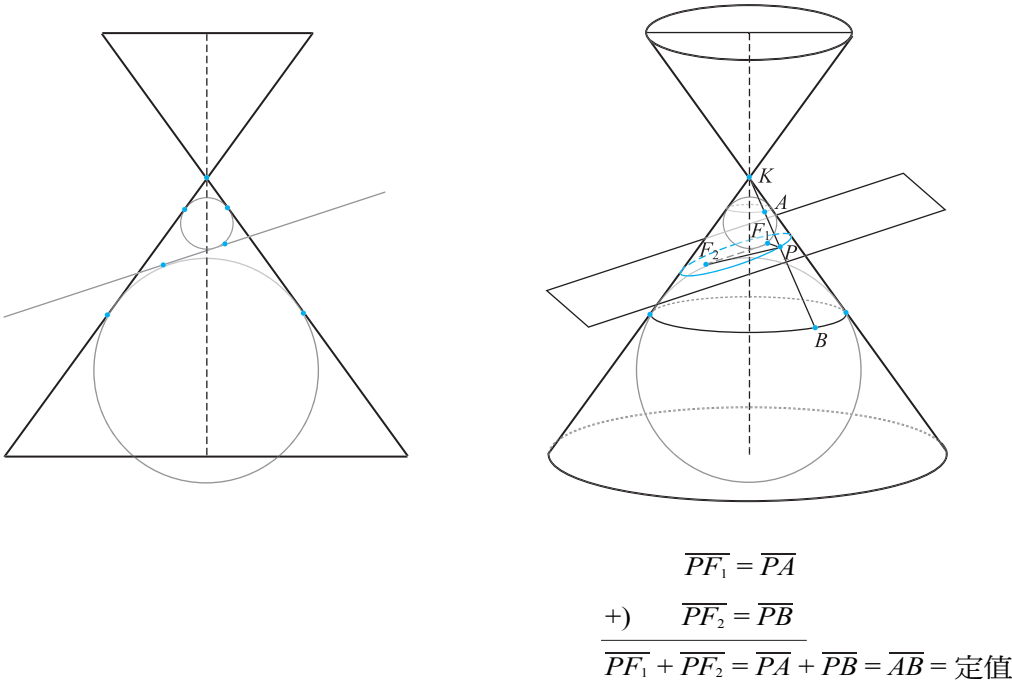
1. 當切入方向剛好平行母線時，截面與雙圓錐的交集是拋物線。
2. 當切入方向比較「平緩」，陡峭的程度還不到母線的時候，截面與雙圓錐的交集是橢圓。
3. 當切入方向比較「陡峭」，陡峭的程度已超過母線的時候，截面與雙圓錐的交集是雙曲線。

雖然我們先提到拋物線，但我們打算把拋物線的證明留到最後，先處理比較簡單的情況。

橢圓

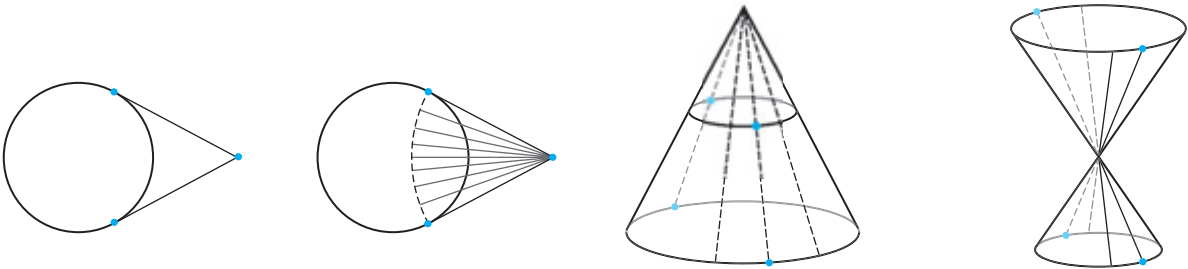
我們覺得，好的證明應該在直觀與嚴謹之中取得良好的平衡，而對於高中生或初學者而言，直觀的份量應該下得更重一些。因此，除了開頭一些口語化的說明之外，我們儘可能讓圖形自己說話，也就是俗稱的無字證明（proofs without words）。

如圖 5，下方的圓錐被截面分成兩個「房間」，分別在兩個房間置入內切球，這兩個球與截面的切點分別為 F_1, F_2 ，那麼，這兩點剛好會是橢圓的兩焦點。事實上，給定截痕上任何一點 P ，通過 P 點的母線是幫助我們看清事實的關鍵。



▲圖 5

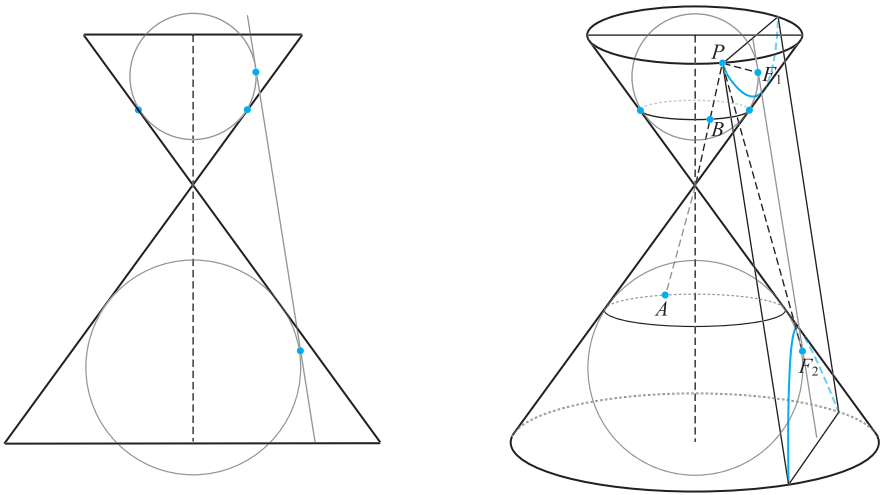
註：為了理解上述的等式，學生應該具備兩個背景知識，一個是「切線段等長」，一個是「母線段等長」，如圖 6 所示。



▲圖 6

雙曲線

如圖 7，雙圓錐被截面分成四個「房間」，分別在其中兩個包含頂點的房間置入內切球，這兩個球與截面的切點分別為 F_1, F_2 ，這兩點剛好是雙曲線的兩焦點。事實上，給定截痕上任何一點 P ，通過 P 點的母線是幫助我們看清事實的關鍵。



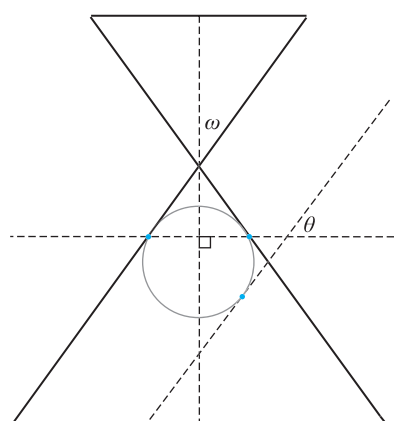
$$\begin{aligned} &\overline{PF_2} = \overline{PA} \\ -) &\overline{PF_1} = \overline{PB} \\ \hline &\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \overline{PA} - \overline{PB} = \overline{AB} = \text{定值} \end{aligned}$$

▲ 圖 7

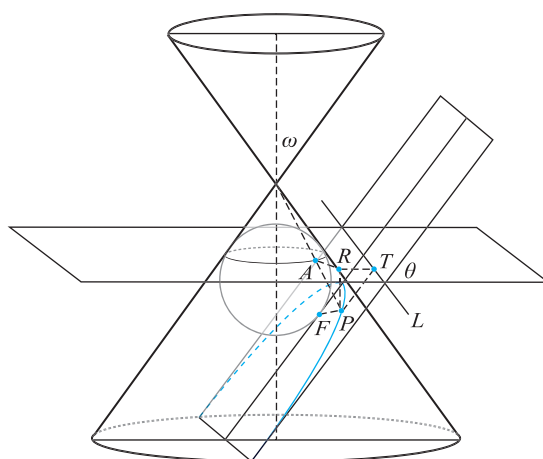
拋物線

如圖 8，下方的圓錐被截面分成兩個「房間」，在其中包含頂點的房間置入內切球，它與截面的切點為 F 。接下來，考慮內切球與圓錐的交集（圓）所在的水平面，它與截面的交線為 L 。那麼， F 與 L 剛好是拋物線的焦點與準線。事實上，給定截痕上任何一點 P ，通過 P 點的母線以及 P 點在「水平面」的垂足，這兩者是幫助我們看清事實的關鍵。

註： $\triangle PMR$ 與 $\triangle PTR$ 的全等看起來很自然，但嚴格說起來，其實是「兩面角」與「三垂線定理」這兩個概念的綜合應用。



$$\theta + \omega = 90^\circ$$



$\overline{PT} \perp L$, $\angle RPA = \omega = \angle RPT$, $\overline{RP} = \overline{RP}$,
 i.e. $\triangle PRA \cong \triangle RPT$ (RHS),
 $\therefore \overline{PA} = \overline{PT}$.
 又 $\overline{PA} = \overline{PF}$ (切線段等長)。

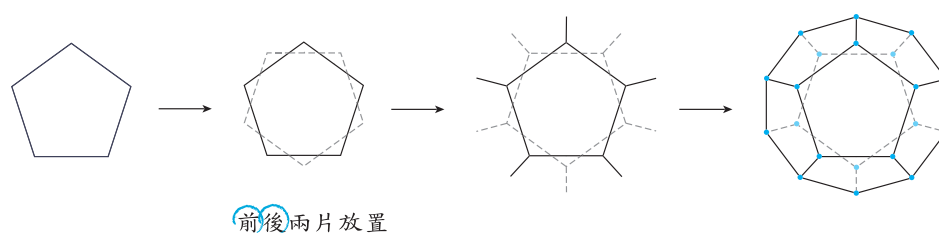
▲ 圖 8

正多面體

關於五個正多面體，我們特別想強調的是如何徒手繪製其示意圖，並進一步利用示意圖來驗證尤拉公式 $v - e + f = 2$ ，以及計算相鄰兩面的夾角。真正的挑戰在於正 12 面體與正 20 面體，因此我們將省略正 4、正 6、正 8 面體的狀況。

正 12 面體

1. 繪圖程序



▲ 圖 9

2. 驗證尤拉公式： $v - e + f = 20 - 30 + 12 = 2$

3. 計算相鄰兩面的夾角：

如圖 10 所示，

$$\text{設 } \overline{AK} = 1 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot \cos 108^\circ} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

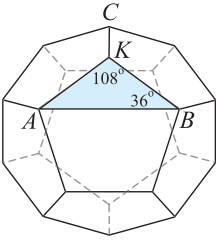


圖 10

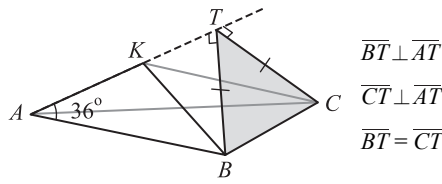


圖 11

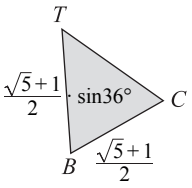


圖 12

邊長同除
 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

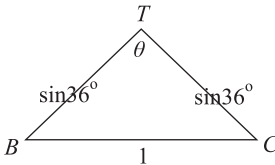
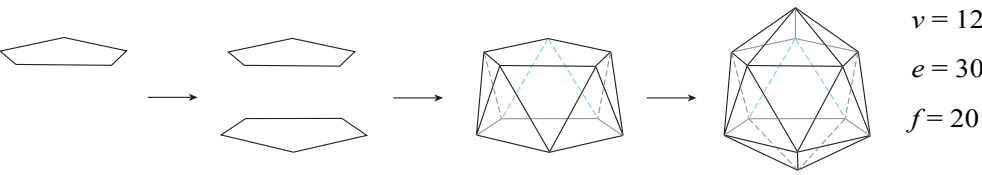


圖 13

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{\sin^2 36^\circ + \sin^2 36^\circ - 1^2}{2 \cdot \sin 36^\circ \cdot \sin 36^\circ} \\ &= \frac{\frac{10-2\sqrt{5}}{16} + \frac{10-2\sqrt{5}}{16} - 1}{2 \cdot \frac{10-2\sqrt{5}}{16}} \quad (\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

正 20 面體

1. 繪圖程序：

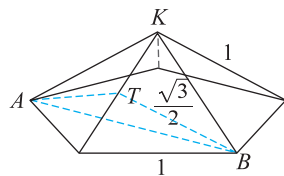


上下兩片放置

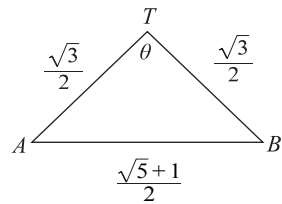
圖 14

2. 驗證尤拉公式： $v - e + f = 12 - 30 + 20 = 2$

3. 計算相鄰兩面的夾角：



▲ 圖 15



▲ 圖 16

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{6+2\sqrt{5}}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{6-6-2\sqrt{5}}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{-\sqrt{5}}{3}.\end{aligned}$$

結語

不論工業技術與電腦軟體如何進步，紙筆作為思考的工具絕不會被時代淘汰，事實上，最深刻的文化成就常常是一張紙、一張紙所累積起來的，紙筆不但讓我們將知識輕鬆帶著走，也是人際溝通的重要媒介。

如果電影《明天過後》的預言成真，大自然奪走了人類所創造的一切身外之物，只要一根樹枝、一小片沙地，我們仍然能夠傳遞圓錐截痕與正多面體的概念，這就是紙筆原始卻恆久的力量。