

98 學年教師甄選試題數學解答

1. 將四個不同顏色的球放入編號為 A、B、C、D 的四個盒子中，則恰有一個盒子是空的放法有幾種？(每個盒子都有容納四個球的空間)

解： $C_1^4 \times C_2^4 \times 3! = 4 \times 6 \times 6 = 144$

2. 已知函數 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 2bx$ 在 $x=1$ 處有極小值 -1 ，試求

(1) a 、 b 的值。

(2) $f(x)$ 為增、減函數的區間。

解： $a = \frac{1}{3}, b = \frac{-1}{2}$

① 於區間 $(-\infty, \frac{-1}{3})$ 或 $(1, \infty)$ 時，函數 $f(x)$ 為增函數

② 於區間 $(\frac{-1}{3}, 1)$ 時，函數 $f(x)$ 為減函數

3. 求函數 $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{12-3x}$ 的值域。

解：函數的定義域為 $[3, 4]$ ，知 $0 \leq x-3 \leq 1$

可令 $x-3 = \sin^2 \theta$ ，其中 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

可化函數為 $f(x) = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$

$f(x)$ 的值域為 $[1, 2]$

4. 試計算 $\sum_{k=1}^{40} \frac{k C_{40-k}^{60} C_k^{40}}{C_{40}^{100}}$ 之值。

解：本題可視為：

袋中有 40 顆紅球，60 顆白球，一次取出 40 顆球，求取出紅球數目的期

望值。 $\frac{2}{5} \times 40 = 16$

5. 一斜率為 $\sqrt{2}$ 的直線通過拋物線 $y^2 = 4x$ 的焦點 $(1, 0)$ ，且與拋物線相交於 A、B 兩點，由 A、B 分別向準線作垂線，垂足分別為 A' 、 B' ，求梯形 $ABB'A'$ 的面積。

解：將 $y = \sqrt{2}(x-1)$ 代入 $y^2 = 4x$ ，得 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 。

求得 $\overline{AB} = \sqrt{3(4^2 - 4)} = 6$

梯形 $ABB'A'$ 的面積為

$$\frac{1}{2}(\overline{AA'} + \overline{BB'}) \times \overline{A'B'} = \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{A'B'} = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

6. 由 0、1、2、3 四個數字組成的自然數按由小而大的順序排成一個數列

$\{a_n\} = \{1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, \dots\}$ ，則 $a_{2009} = ?$

解：根據題意，本題事實上為求 2009 的 4 進位表示法

而 2009 的 4 進位表示法為

$$2009 = (133121)_4, \text{ 即 } a_{2009} = 133121$$

7. 若實數 x, y 滿足 $\frac{x}{2^{10} + 5^3} + \frac{y}{2^{10} + 6^3} = 1$ ， $\frac{x}{3^{10} + 5^3} + \frac{y}{3^{10} + 6^3} = 1$ ，求 $x + y$ 。

解：構造一個方程式： $\frac{x}{t + 5^3} + \frac{y}{t + 6^3} = 1$ ，則 2^{10} 、 3^{10} 為這個方程式的兩個根。

將方程式整理成為 $t^2 - (x + y - 5^3 - 6^3)t + 30^3 - 6^3x - 5^3y = 0$

兩根和 $2^{10} + 3^{10} = x + y - 5^3 - 6^3$

從而 $x + y = 2^{10} + 3^{10} + 5^3 + 6^3$

8. 設點 $A(x_0, y_0, z_0)$ 為空間中不在平面 E 上之任一點，其中平面

$$E: ax + by + cz + d = 0, (a, b, c \in R)$$

試證：點 A 到平面 E 之距離為 $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

解：略

9. 設 n 為大於 1 的自然數，試證： $(\frac{n+1}{2})^n \geq n!$

解：略

10. 試解不等式 $\log_{-2x+7}(x^2 - 2x - 3) > 1$

解：略