

高中數學競試試題選(II)¹

主持人:

林 強 陳弘毅

國立中央大學數學系

¹利用 χTeX (by 中大數學系陳弘毅) 編寫

目 錄

1	多項式—(建國中學 蔡聰池 編寫)	2
2	不等式—(建國中學 曾政清 編寫)	13
3	函數—(建國中學 范文榮 編寫)	25
4	數論—(建國中學 張文良、繆友勇 編寫)	58
5	幾何—(建國中學 林信安 編寫)	91
6	組合—(建國中學 李瑞 編寫)	105

第 1 章

多項式

1. 設 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n} = (x + 2x^2 + \cdots + nx^n)^2 \dots\dots\dots (1)$

求證： $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} = \frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}$

(1990年 巴爾幹數學競賽題)

證明 首先，確定係數 a_k ，可由比較(1)的兩邊 k 次項的係數，而得：

$$a_k = 1 \cdot (k-1) + 2 \cdot (k-2) + 3(k-3) + \cdots + (k-2)[k - (k-2)] \\ + (k-1)[k - (k-1)]$$

$$= [1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1)]k - [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k-1)^2]$$

$$= \frac{(k-1) \cdot k}{2} \cdot k - \frac{(k-1)k(2k-1)}{6} = \frac{(k+1)k(k-1)}{6} = C_3^{k+1}$$

$$\therefore a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

$$= 0 + 0 + C_3^3 + C_3^4 + C_3^5 + \cdots + C_3^{n+1} = C_4^{n+2}$$

接著，在(1)中，令 $x = 1$ ，得：

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n})$$

$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\text{故, } a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{2n}) - (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4!} = \frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}$$

□

2. 已知有整係數 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 的多項式 $F(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 且存在四個不同的整數 a, b, c, d 使得 $F(a) = F(b) = F(c) = F(d) = 5$

求證：不存在整數 k ，滿足 $F(k) = 8$

(1970年加拿大中學生數學競賽題)

解 依題意，令 $G(x) = F(x) - 5$ ，知 $G(x)$ 有四個不同的整數根 a, b, c, d ，由因式定理，可記 $G(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)H(x)$ 其中 $H(x)$ 為整係數多項式

假定存在整數 k 滿足 $F(k) = 8$

那麼 $G(k) = F(k) - 5 = 8 - 5 = 3$

即 $(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)H(k) = 3$

這表明四個互不相同的整數 $k-a, k-b, k-c, k-d$ 中至多有一個能等於 ± 3 ，而其餘三個必定為 ± 1

因此，其中有兩個相等，這與已知矛盾。

故，這樣的 k 是不存在的。 \square

3. 證明在整數的無窮數列：10001, 100010001, 1000100010001, \dots 中，沒有質數。

(1979年 英國奧林匹亞競賽題)

解 這數列的項可寫成： $1 + 10^4, 1 + 10^4 + 10^8, \dots, 1 + 10^4 + \dots + 10^{4n}, \dots$ ，其中 $n = 1, 2, 3, \dots, k, \dots$

更一般化，可以考慮數列： $1 + x^4, 1 + x^4 + x^8, \dots, 1 + x^4 + \dots + x^{4n}, \dots$ ，其中， $x \in N \quad x > 1$

(1) 若 n 是奇數，設 $n = 2m + 1, m \in N$

$$\begin{aligned} & \text{則 } 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \dots + x^{4(2m)} + x^{4(2m+1)} \\ &= (1 + x^4) + x^8(1 + x^4) + \dots + x^{8m}(1 + x^4) \\ &= (1 + x^4)(1 + x^8 + \dots + x^{8m}) \end{aligned}$$

因此，這數為合數

對於， $m = 0, x = 10$ 時，由於 $1 + 10^{4 \cdot 1} = 10001 = 73 \times 137$ ，因此，這數也是合數

(2) 若 n 是偶數, 設 $n = 2m, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \text{則 } 1 + x^4 + x^8 + x^{4(2m-1)} + x^{4(2m)} \\ &= \frac{1-(x^4)^{2m+1}}{1-x^4} = \frac{1-(x^{2m+1})^4}{1-x^4} = \frac{1-(x^{2m+1})^2}{1-x^2} \cdot \frac{1+(x^{2m+1})^2}{1+x^2} \\ &= \frac{1-(x^2)^{2m+1}}{1-x^2} \cdot \frac{1+(x^2)^{2m+1}}{1+x^2} \\ &= [1 + x^2 + \cdots + (x^2)^{2m}][1 - x^2 + \cdots + (x^2)^{2m}] \end{aligned}$$

因此, 這數為合數

縱合(1)(2)表明, 這數列中沒有質數

□

4. 設 $k \in \mathbb{N}$, 求一切實係數多項式 $P(x)$, 使其滿足 $P(P(x)) = [P(x)]^k$
(1975年 第七屆加拿大數學競試題)

解

設 $\deg P(x) = n$ 則 $\deg P(P(x)) = n^2, \deg [P(x)]^k = nk$

於是, $n^2 = nk \Rightarrow n(n-k) = 0 \Rightarrow n = 0$ 或 $n = k \neq 0$

因此, 或者 $n = 0$ 而 $P(x)$ 為常數; 或者 $n = k \neq 0$ 而 $P(x)$ 不是常數

(1) 如果 $P(x) = c$ (常數) 則有 $c = c^k$

a. 當 k 是偶數時, $c = 0$ 或 $c = 1$

b. 當 k 是奇數時, $c = 0$ 或 $c = \pm 1$

(2) 如果 $P(x)$ 不是常數, 且 $n = k \neq 0, P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} +$

$\cdots + a_1 x + a_0$

那麼, $a_k \neq 0$ 且 $a_k(a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0)^k$

$$+ a_{k-1}(a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0)^{k-1}$$

$+\cdots$

$$+ a_1(a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0)$$

$+ a_0$

$$= (a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0)^k$$

比較兩邊首項, 冪 x^{k^2} 的係數得 $a_k^{k+1} = a_k^k \Rightarrow a_k = 1$

於是, $a_{k-1}(a_k x^k + \dots + a_0)^{k-1} + \dots + a_1(a_k x^k + \dots + a_0) + a_0 = 0$
 繼續考察兩邊首項, 依次得 $0 = a_{k-1} = a_{k-2} = \dots = a_1 = a_0$
 所以 $P(x) = x_k$

□

5. 求所有的正整數 m 與 n

使 $1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn}$ 被 $1 + x + x^2 + \dots + x^m$ 整除
 (1977年 美國數學競試實題)

解 $\because f(x) = 1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn} = \frac{(x^n)^{m+1} - 1}{x^n - 1} = \frac{x^{(m+1)n} - 1}{x^n - 1}$
 $g(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^m = \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}$
 $\therefore \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{(m+1)n} - 1}{x^n - 1} \cdot \frac{x - 1}{x^{m+1} - 1} \dots\dots\dots (*)$
 \because 對於所有正整數 m 與 n 而言, $x^{m+1} - 1$ 與 $x^n - 1$ 都能整除 $x^{(m+1)n} - 1$
 且 $x^{(m+1)n} - 1$ 的因式都不相同(無重因式)
 \therefore 只要 $x^{(m+1)} - 1$ 與 $x^n - 1$ 沒有 $x - 1$ 以外的公因式, 即可使得 $(*)$
 成為多項式
 故充要條件是使 $m+1$ 與 n 互質的所有正整數 m 與 n 皆為所求. □

6. 設 $P(x), Q(x), R(x)$ 及 $S(x)$ 都是多項式, 且滿足 :

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x)$$

求證 : $x - 1$ 是 $P(x)$ 的一個因子

(1976年 美國數學競試實題)

解 $\because x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \therefore$ 令 $w = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ 則
 $w^k (k = 1, 2, 3, 4)$ 是 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 的根, 且 $w^5 = 1$
 $\therefore P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x)$
 \therefore 取 $x = w^k (k = 1, 2, 3, 4)$ 代入上式, 得
 $P(1) + w^k Q(1) + w^{2k} R(1) = 0 \dots\dots\dots (1)$
 即 $P(1) + wQ(1) + w^2R(1) = 0$
 $P(1) + w^2Q(1) + w^4R(1) = 0$

$$\begin{aligned}
P(1) + w^3Q(1) + w^6R(1) &= 0 \\
P(1) + w^4Q(1) + w^8R(1) &= 0 \\
\therefore 4P(1) + (w + w^2 + w^3 + w^4)Q(1) + (w^2 + w^4 + w^6 + w^8)R(1) &= 0 \\
\therefore 4P(1) - Q(1) - R(1) &= 0 \dots\dots\dots (2) \\
(1) \times w^k, \text{ 得 } w^kP(1) + w^{2k}Q(1) + w^{3k}R(1) &= 0 (k = 1, 2, 3, 4) \\
\text{同理, 可得 } -P(1) - Q(1) - R(1) &= 0 \dots\dots\dots (3) \\
(2) - (3) \text{ 得 } 5P(1) = 0 \therefore P(1) = 0, \text{ 即 } x - 1 \text{ 是 } P(x) \text{ 的一個因子}
\end{aligned}$$

7. 如果整係數方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有有理根

求證： a, b, c 中至少有一個是偶數

(1958 1959年 波蘭數學競試賽題)

解 首先, 我們做根的變換:

在方程 $ax^2 + bx + c = 0 \dots\dots\dots (1)$ 中, $a, b, c \in Z$ 且 $a \neq 0$

令 $x = \frac{y}{a}$, 得 $a(\frac{y}{a})^2 + b(\frac{y}{a}) + c = 0 \Rightarrow y^2 + by + ac = 0 \dots\dots\dots (2)$

由根與係數的關係, 知(2)的兩根 y_1, y_2 有: $y_1 + y_2 = -b, y_1y_2 = ac \therefore$

$abc = -y_1y_2(y_1 + y_2) \dots\dots\dots (3)$

\therefore 如果 x 是有理數, 那麼數 $y = ax$ 也是有理數

\therefore (2) 與 (1) 一樣, 也有有理根

\therefore 如果最高項係數為 1 的整係數方程有有理根, 那麼這個根必為整數

\therefore (2) 有整數跟 y_1, y_2

\therefore 數 $y_1, y_2, y_1 + y_2$ 中至少有一個是偶數

\therefore 由 (3) 知, 乘積 abc 是偶數, 由此可知數 a, b, c 中至少有一個是偶數

□

8. 設整係數多項式 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$

$f(0)$ 與 $f(1)$ 為奇數

求證： $f(x)$ 沒有整數根

(1941年 莫斯科數學競賽題)

證明 假定 $f(x_0) = 0, x_0 \in Z$

(1) 如果 x_0 是偶數,

$$\text{則 } f(x_0) - f(0) = (a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0) - a_0$$

$$0 - f(0) = a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0$$

$f(0) = -(a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0)$ 亦為偶數, 這與已知矛盾

(2) 如果 x_0 是奇數,

$$\text{則 } f(x_0) - f(1) = (a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0) - (a_n + \cdots + a_1 + a_0)$$

$$0 - f(1) = a_n(x_0^n - 1) + \cdots + a_1(x_0 - 1)$$

$f(1) = -[a_n(x_0^n - 1) + \cdots + a_1(x_0 - 1)]$ 亦為偶數, 這與已知矛盾

綜合 (1)(2) 知 $f(x)$ 沒有整數根 □

9. 設有兩個關於 x 的整係數多項式

它們的乘積是一個偶係數多項式, 但不是每個係數都可被 4 整除

求證: 這兩個整係數多項式中, 有一個多項式的係數全是偶數, 而另一個多項式中至少有一個係數為奇數

(1939年 莫斯科數學競試賽題)

解

設 $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 且 $f(x)g(x)$ 是偶係數多項式, 但不是所有係數都是 4 的倍數

(1) 假定 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的係數中都有奇數

用 $f_1(x)$ 和 $g_1(x)$ 分別表示由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中所有係數為奇數的單項組成的多項式則 $f(x) \equiv f_1(x) \pmod{2}, g(x) \equiv g_1(x) \pmod{2}$

$$\therefore f(x)g(x) \equiv f_1(x)g_1(x) \equiv 0$$

這裡表明: $f_1(x)g_1(x)$ 的所有係數均為偶數

但是, 由假設可知: $f_1(x)g_1(x)$ 的最高次項係數必為奇數, 矛盾故, $f(x)$ 和 $g(x)$ 中至少有一個的係數全為偶數

(2) 假定 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的係數都為偶數

由多項式乘法可知 $f(x)g(x) \equiv 0 \pmod{4}$

即 $f(x)g(x)$ 的所有係數都是 4 的倍數, 這與已知矛盾

綜合(1)(2)得出, $f(x)$ 與 $g(x)$ 中有一個的係數全是偶數, 另一個的係數至少有一個係數是奇數 □

10. 試指出, 如果方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 有三個成等差數列的實根
實數 a, b, c 應滿足什麼樣的充要條件?
(1951 1952 年 波蘭數學競賽題)

解

設方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的三根為 x_1, x_2, x_3
由根與係數的關係, 有 $x_1 + x_2 + x_3 = -a \cdots (1)$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b \cdots (2)$$

當且僅當 x_1, x_2, x_3 成等差數列, 則 $x_1 + x_3 = 2x_2 \cdots \cdots (3)$

把 (3) 代入 (1), 得 $3x_2 = -a, \therefore x_2 = -\frac{a}{3}$, 又 $\because a \in R \therefore x_2 = -\frac{a}{3} \in R$

把 $x_2 = -\frac{a}{3}$ 代入原方程式得 $(-\frac{a}{3})^3 + a(-\frac{a}{3})^2 + b(-\frac{a}{3}) + c = 0 \Rightarrow$
 $2a^3 - 9ab + 27c = 0 \cdots \cdots (4)$

現在, 我們已求得實數 a, b, c 滿足 (4), 原方程式有實數根 $x_2 = -\frac{a}{3}$

接著, 我們還得求出原方程式的另二根 x_1, x_3 是實數的充要條件:

由 (3) 有 $x_1 + x_3 = 2x_2 = 2(-\frac{a}{3}) = -\frac{2}{3}a \cdots \cdots (5)$

由 (2) 有 $x_1x_3 = b - x_2(x_1 + x_3) = b - 2x_2^2 = b - 2(-\frac{a}{3})^2 = b - \frac{2}{9}a^2 \cdots (6)$

可見, x_1, x_3 是方程式 $x^2 + \frac{2}{3}ax + b - \frac{2}{9}a^2 = 0$ 的兩根

此方程式有實根的充要條件為 $\Delta = (\frac{2}{3}a)^2 - 4(b - \frac{2}{9}a^2) \geq 0 \Rightarrow a^2 - 3b \geq 0 \cdots \cdots (7)$

故, 原方程式具有三個成等差數列實根的充要條件是 (4) 及 (7) 即

$2a^3 - 9ab + 27c = 0$ 及 $a^2 - 3b \geq 0$ □

11. 設 x_1 與 x_2 為方程式 $x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = 0$ 的根
求證: x_1^3 與 x_2^3 為方程式 $y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + (ad - bc)^3 = 0$
的根

(1899年 匈牙利競試題)

解 $\because x_1, x_2$ 為 $x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0$ 的根

由根與係數的關係

$$\therefore x_1 + x_2 = a + d, \quad x_1 x_2 = ad - bc$$

$$\therefore x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

$$= (a + d)^3 - 3(ad - bc)(a + d)$$

$$= (a + d)[(a + d)^2 - 3(ad - bc)]$$

$$= (a + d)(a^2 + 2ad + d^2 - 3ad + 3bc)$$

$$= (a + d)(a^2 - ad + d^2 + 3bc)$$

$$= a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd$$

$$x_1^3 x_2^3 = (x_1 x_2)^3 = (ad - bc)^3$$

$$\therefore y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + (ad - bc)^3 = 0$$

$$\text{同義於 } y^2 - (x_1^3 + x_2^3)y + x_1^3 x_2^3 = 0 \Leftrightarrow (y - x_1^3)(y - x_2^3) = 0$$

$$\text{表明 } x_1^3 \text{ 與 } x_2^3 \text{ 為方程式 } y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + (ad - bc)^3 = 0$$

的根

□

12. 設四次方程 $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$ 的四個根中, 有兩個根的乘積為 -32

求 k

(1984年 美國數學競賽題)

解 設方程式的四個根是 x_1, x_2, x_3, x_4 依根與係數的關係, 有

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \dots\dots\dots (1)$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = k \dots\dots\dots (2)$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -200 \dots\dots\dots (3)$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = -1984 \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{依題意, 不妨設 } x_1 x_2 = -32 \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{由 (4) 得 } x_3 x_4 = \frac{-1984}{-32} = 62 \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{把(5)(6)代入(3)} \quad x_1x_2(x_3+x_4) + (x_1+x_2)x_3x_4 = -200$$

$$-32(x_3+x_4) + 62(x_1+x_2) = -200$$

$$\text{得 } 31(x_1+x_2) - 16(x_3+x_4) = -100 \quad (7)$$

$$\text{解 (1) 與 (7) 得 } \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_3+x_4=14 \end{cases}$$

$$\text{由 (2), 有 } k = x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1+x_2)(x_3+x_4)$$

$$\text{故 } k = -32 + 62 + 4 \times 14 = 86$$

□

13.

$$\text{已知 } \frac{x^2}{2^2-1^2} + \frac{y^2}{2^2-3^2} + \frac{z^2}{2^2-5^2} + \frac{w^2}{2^2-7^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4^2-1^2} + \frac{y^2}{4^2-3^2} + \frac{z^2}{4^2-5^2} + \frac{w^2}{4^2-7^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{6^2-1^2} + \frac{y^2}{6^2-3^2} + \frac{z^2}{6^2-5^2} + \frac{w^2}{6^2-7^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{8^2-1^2} + \frac{y^2}{8^2-3^2} + \frac{z^2}{8^2-5^2} + \frac{w^2}{8^2-7^2} = 1$$

求 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ 的值

(1984年 美國數學邀請賽題)

解

x, y, z, w 能滿足給定的方程組等價於

$$t = 4, 16, 36, 49 \text{ 滿足方程 } \frac{x^2}{t-1} + \frac{y^2}{t-9} + \frac{z^2}{t-25} + \frac{w^2}{t-49} = 1 \dots\dots\dots (1)$$

當 $t \neq 1, 9, 25, 49$ 時, 去分母,

$$(1) \text{ 等價於 } (t-1)(t-9)(t-25)(t-49)$$

$$-x^2(t-9)(t-25)(t-49)$$

$$-y^2(t-1)(t-25)(t-49)$$

$$-z^2(t-1)(t-9)(t-49)$$

$$-w^2(t-1)(t-9)(t-25) = 0 \quad (2)$$

因此, (2) 是關於 t 的四次方程, 它的全部方根為 4, 16, 36, 49 它又等

$$\text{價於 } (t-4)(t-16)(t-36)(t-49) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

\therefore (2)(3) 為同解方程, 且 t^4 的係數都是 1

\therefore 其餘各同次項的係數也應相等, 比較 t^3 項的係數, 即得:

$$-1 - 9 - 25 - 49 - x^2 - y^2 - z^2 - w^2 = -4 - 16 - 36 - 64$$

$$\text{故, } x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 36$$

□

14. 設 a 與 b 均為實數, 且 $2a^2 < 5b$

求證: 方程 $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 的根不可能都是實數

(1983年 美國數學競賽題)

解 : (用反證法)

假定方程的五個根 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 全是實數

由根與係數的關係, 可知:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -a$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 = b$$

$$\because 2a^2 < 5b$$

$$\therefore 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 < 5(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_4x_5)$$

$$2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) < x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_4x_5 \cdots (1)$$

$$\text{另一方面: } x_1^2 + x_2^2 \geq 2|x_1x_2| \geq 2x_1x_2$$

$$x_1^2 + x_3^2 \geq 2x_1x_3$$

$$x_1^2 + x_4^2 \geq 2x_1x_4$$

$$x_1^2 + x_5^2 \geq 2x_1x_5$$

$$x_2^2 + x_3^2 \geq 2x_2x_3$$

$$\cdots \cdots x_4^2 + x_5^2 \geq 2x_4x_5$$

$$\text{累加, 得 } 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) \geq 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_4x_5)$$

$$2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) \geq x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_4x_5 \cdots (2)$$

但是, (1) 與 (2) 顯然自相矛盾

故, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 不可能都是實數

□

15. 求證: 實係數的多項式方程 $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 不可能全是實數根

(Murray Klamkin, Crux Mathematicorum, Vol.5, No.9, November 1979, P259)

證明 設 r_1, r_2, \dots, r_n 為 $P(x) = 0$ 的根, 則 r_1, r_2, \dots, r_n 都不是 0

在 $P(x) = 0$ 的兩邊同除以 x^n , 並令 $y = \frac{1}{x}$ 得

$$Q(y) = y^n + y^{n-1} + y^{n-2} + a_3 y^{n-3} + \cdots + a_{n-1} y + a_n = 0$$

注意, 當且僅當 $\frac{1}{r}$ 是 $Q(y) = 0$ 的根時, r 是 $P(x) = 0$ 的根

因此, $Q(y) = 0$ 的根是 S_1, S_2, \dots, S_n 其中 $S_i = \frac{1}{r_i}, i = 1, 2, \dots, n$

由根與係數的關係, 知 $\sum_{i=1}^n S_i = -1, \sum_{1 \leq i < j \leq n} S_i S_j = 1$

於是, $\sum_{i=1}^n S_i^2 = (\sum_{i=1}^n S_i)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} S_i S_j = (-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1 < 0$

上式說明: 不是全體 S_i 都是實數, 也就是說, 不是全體 r_i 都是實數

□

回目錄

第 2 章

不等式

1. 試求滿足下列聯立不等式的實數解 $(x_1, x_2, \dots, x_{1995})$
- $$\begin{cases} \sqrt{x_n} + 83\sqrt{x_{n+2}} \geq 84\sqrt{x_{n+1}}, n = 1, 2, 3, \dots, 1993 \\ \sqrt{x_{1994}} + 83\sqrt{x_1} \geq 84\sqrt{x_{1995}} \\ \sqrt{x_{1995}} + 83\sqrt{x_2} \geq 84\sqrt{x_1} \end{cases}$$

解 令 $\sqrt{x_n} = a_n, n = 1, 2, 3, \dots, 1995$;

原聯立不等式等價於

$$(甲) \begin{cases} a_k + 83a_{k+2} \geq 84a_{k+1}, k = 1, 2, 3, \dots, 1993 \\ a_{1994} + 83a_1 \geq 84a_{1995} \\ a_{1995} + 83a_2 \geq 84a_1 \end{cases}$$

即得

$$(乙) \begin{cases} a_k - a_{k+1} \geq 83(a_{k+1} - a_{k+2}), k = 1, 2, \dots, 1993 \\ a_{1994} - a_{1995} \geq 83(a_{1995} - a_1) \\ a_{1995} - a_1 \geq 83(a_1 - a_2) \end{cases}$$

(1) 當 $a_1 = a_2 = \dots = a_{1995}$ 時, 代入 (甲) 式中,

直接檢驗得知滿足聯立不等式,

即 $x_1 = x_2 = \dots = x_{1995}$ 之任意實數均為所要的解

(2) 再證唯一解

即 $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{1995}$ 之外

原聯立不等式已無其他解

先證 $a_1 = a_2$

< 1 > 若 $a_1 > a_2$ 則由 (乙) 式推得

$$a_{1995} > a_1, a_{1994} > a_{1995}, \dots, a_1 > a_2,$$

所以 $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_{1995} > a_1$ 矛盾

< 2 > 若 $a_1 < a_2$ 則由 (乙) 式推得

$$a_1 < a_2, a_2 < a_3, \dots, a_{1994} < a_{1995}, a_{1995} < a_1,$$

所以 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{1995} < a_1$ 矛盾 \square

2. 已知 a, b, c 為正實數, 求證

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

證明 $\because [(b+c) + (c+a) + (a+b)][\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}] \geq (1+1+1)^2 = 9$

$$\therefore (a+b+c)(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}) \geq \frac{9}{2}$$

$$\text{即 } \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow (1 + \frac{a}{b+c}) + (1 + \frac{b}{c+a}) + (1 + \frac{c}{a+b}) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \square$$

< 註 >: 這個不等式可推廣為

設 $x_i > 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$ 且令 $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$$\text{則 } \frac{x_1}{S-x_1} + \frac{x_2}{S-x_2} + \frac{x_3}{S-x_3} + \dots + \frac{x_n}{S-x_n} \geq \frac{n}{n-1}$$

等號成立之條件為 $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$

證明

$$\begin{aligned} & \frac{x_1}{S-x_1} + \frac{x_2}{S-x_2} + \dots + \frac{x_n}{S-x_n} \\ &= \frac{S-(S-x_1)}{S-x_1} + \frac{S-(S-x_2)}{S-x_2} + \dots + \frac{S-(S-x_n)}{S-x_n} \\ &= S(\frac{1}{S-x_1} + \frac{1}{S-x_2} + \frac{1}{S-x_3} + \dots + \frac{1}{S-x_n}) - n \\ &= \frac{1}{n-1}[(S-x_1) + (S-x_2) + \dots + (S-x_n)](\frac{1}{S-x_1} + \frac{1}{S-x_2} + \dots + \frac{1}{S-x_n}) - n \\ &\geq \frac{1}{n-1}n^2 - n \quad (\because \text{柯西不等式}) \\ &= \frac{n}{n-1} \end{aligned}$$

等號成立之條件為

$$(S-x_1) : (S-x_2) : \dots : (S-x_n) = \frac{1}{S-x_1} : \frac{1}{S-x_2} : \dots : \frac{1}{S-x_n}$$

$$\text{亦即 } \frac{S-x_1}{\frac{1}{S-x_1}} = \frac{S-x_2}{\frac{1}{S-x_2}} = \dots = \frac{S-x_n}{\frac{1}{S-x_n}}$$

得 $S - x_1 = S - x_2 = S - x_3 = \cdots = S - x_n$

即 $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$

□

3. 試求滿足下列條件的最小自然數 n :

對所有的自然數 p, q 恆有 $|\sqrt{2} - \frac{q}{p}| > \frac{1}{np^2}$ (I)

解

令 $p = 1, q = 1$ 得到 $|\sqrt{2} - \frac{1}{1}| > \frac{1}{n}$

故 $\frac{1}{2} > \frac{1}{n}$ ($\because \frac{1}{2} > \sqrt{2} - 1$)

得知 $n \geq 3$ (a)

現在要證明 $n = 3$ 滿足 (I) (b)

分三種情形討論

(1) 若 $p = 1$,

則 $|\sqrt{2} - \frac{q}{p}| = |\sqrt{2} - q| \geq 0.4 > \frac{1}{3 \cdot 1^2} = \frac{1}{3p^2}$

(2) 若 $0 < \frac{q}{p} \leq \frac{3}{2}$,

則 $\sqrt{2} + \frac{q}{p} < \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$

$\Rightarrow |2 - \frac{q^2}{p^2}| = |\sqrt{2} - \frac{q}{p}| |\sqrt{2} + \frac{q}{p}| < 3 |\sqrt{2} - \frac{q}{p}|$

$\Rightarrow |\sqrt{2} - \frac{q}{p}| > |\frac{2p^2 - q^2}{3p^2}| \geq \frac{1}{3p^2}$

(3) 若 $\frac{q}{p} \geq \frac{3}{2}$ 且 $p \geq 2$,

則 $|\sqrt{2} - \frac{q}{p}| = \frac{q}{p} - \sqrt{2} \geq \frac{3}{2} - \sqrt{2} \geq \frac{1}{3 \cdot 2^2} \geq \frac{1}{3p^2}$

由上面得知:

(a) $n \geq 3$

(b) $n = 3$ 滿足 (I)

故 $n = 3$ 為滿足 (I) 之最小自然數

□

4. 設 a, b 為實數

試證明 $\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geq \frac{a^3b + ab^3}{2}$, 並問等號成立之條件?

證明 $\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{3} - \frac{a^3b+ab^3}{2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}[2(a^4 + a^2b^2 + b^4) - 3(a^3b + ab^3)] \\
&= \frac{1}{6}[2a^4 + 2a^2b^2 + 2b^4 - 3a^3b - 3ab^3] \\
&= \frac{1}{6}[(a^4 + b^4) + (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - 3(a^2 + b^2)ab] \\
&= \frac{1}{6}[a^4 + b^4 + (a^2 + b^2)^2 - 3(a^2 + b^2)ab] \\
&= \frac{1}{6}[a^4 + b^4 + (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 3ab)] \\
&= \frac{1}{6}[a^4 + b^4 + (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 2ab) - (a^2 + b^2)ab] \\
&= \frac{1}{6}[(a^3 - b^3)(a - b) + (a^2 + b^2)(a - b)^2] \\
&= \frac{1}{6}[(a - b)^2(a^2 + b^2 + ab) + (a^2 + b^2)(a - b)^2] \geq 0
\end{aligned}$$

其中等號成立之條件為 $a = b$ □

5. 設 a, b, c 都是正數

試證 $\frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b} > 4$

證明 令 $S = a + b + c$

則 $\frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{S-b-c}{b+c} + \frac{4(S-c-a)}{c+a} + \frac{9(S-b-a)}{a+b} \\
&= S[\frac{1}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{9}{a+b}] - (1 + 4 + 9) \\
&= (a + b + c)[\frac{1}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{9}{a+b}] - 14 \\
&= \frac{1}{2}[(b+c) + (c+a) + (a+b)][\frac{1}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{9}{a+b}] - 14 \\
&= \frac{1}{2}[(\sqrt{b+c})^2 + (\sqrt{c+a})^2 + (\sqrt{a+b})^2][(\frac{1}{\sqrt{b+c}})^2 + (\frac{2}{\sqrt{c+a}})^2 + (\frac{3}{\sqrt{a+b}})^2] - 14 \\
&\geq \frac{1}{2}(1 + 2 + 3)^2 - 14 = 18 - 14 = 4
\end{aligned}$$

上面的不等式是利用柯西不等式,

而其等號成立之充要條件是

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{b+c}}{1} &= \frac{\sqrt{c+a}}{2} = \frac{\sqrt{a+b}}{3} \\
\Leftrightarrow \frac{b+c}{1} &= \frac{c+a}{2} = \frac{a+b}{3}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a = 2b, c = 0$$

但已知 c 為正數, 故等號不成立 □

6. 試證對所有的正實數 a, b, c

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

證明 首先我們先證明

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$$

或等價證明

$$(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}})^2 \geq a^{\frac{2}{3}}(a^2 + 8bc)$$

由算幾不等式, 可得

$$\begin{aligned} & (a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}})^2 - (a^{\frac{4}{3}})^2 \\ &= (b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}})(a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}) \\ &\geq 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} \cdot 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} = 8a^{\frac{2}{3}}bc \\ &\text{故 } (a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}})^2 \geq (a^{\frac{4}{3}})^2 + 8a^{\frac{2}{3}}bc \\ &= a^{\frac{2}{3}}(a^2 + 8bc) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$$

同理可得

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \geq \frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$$

及

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$$

將上述這三個不等式加起來可得

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

□

7. 設 $\triangle ABC$ 為銳角三角形

$$\text{試證 } \sqrt{\cos A} + \sqrt{\cos B} + \sqrt{\cos C} \geq \frac{3}{2} \sqrt[6]{\cos A \cos B \cos C}$$

且上式等號 “=” 成立之充要條件為 $\triangle ABC$ 是正 \triangle

解 依算幾不等式得

$$\sqrt{\cos A} + \sqrt{\cos B} + \sqrt{\cos C} \geq 3 \sqrt[6]{\cos A \cos B \cos C}$$

只要能證明:

當 A, B, C 是不全相等的銳角時

$$\text{恆有 } \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C < \frac{1}{8}$$

則由此不等式得

$$(\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)^2 < \frac{1}{64}$$

$$(\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)^3 < \frac{1}{64}(\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

$$\text{進而得出 } \sqrt{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} < \frac{1}{2} \sqrt[6]{\cos A \cos B \cos C}$$

而得欲證之結果

$$\text{以下證明 } \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C < \frac{1}{8}$$

利用三角函數的性質

因爲 $A + B + C = \pi$ 所以得

$$\cos A = -\cos(B + C) = \sin B \cdot \sin C - \cos B \cos C$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 B} \sqrt{1 - \cos^2 C} - \cos B \cos C$$

$$\cos A + \cos B \cos C = \sqrt{1 - \cos^2 B} \sqrt{1 - \cos^2 C}$$

兩邊平方化簡得

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$$

當 A, B, C 不全相等時, 依算幾不等式得

$$\sqrt[3]{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} < \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}{3} = \frac{1 - 2 \cos A \cos B \cos C}{3}$$

$$\Rightarrow 3 \sqrt[3]{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} + 2 \cos A \cos B \cos C - 1 < 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt[3]{\cos A \cos B \cos C} + 1)^2 (2 \sqrt[3]{\cos A \cos B \cos C} - 1) < 0$$

$$\text{由此得 } \sqrt[3]{\cos A \cos B \cos C} < \frac{1}{2}, \text{ 故得 } \cos A \cos B \cos C < \frac{1}{8}$$

□

8. 設 a, b, c 為正實數

$$\text{試證明 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3}$$

證明 不妨設 $a \geq b \geq c \geq 0$

$$\text{則 } \frac{1}{bc} \geq \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{ab}$$

$$\text{故 } \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} = \frac{a^5}{b^3 c^3} + \frac{b^5}{c^3 a^3} + \frac{c^5}{a^3 b^3}$$

$$\geq \frac{a^5}{c^3 a^3} + \frac{b^5}{a^3 b^3} + \frac{c^5}{b^3 c^3} \text{ (利用排序不等式)}$$

$$= \frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} \geq \frac{a^2}{a^3} + \frac{b^2}{b^3} + \frac{c^2}{c^3} \text{ (利用排序不等式)}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\text{故得證 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3}$$

□

9. 設 m 與 n 為正整數, 滿足 $n \leq m$

試證明 $2^n n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2 + m)^n$

證明 首先對 n 作數學歸納法證明下式：

$$\frac{(m+n)!}{(m-n)!} = \prod_{i=1}^n (m^2 + n - i^2 + i) \dots\dots\dots (a)$$

(1) 當 $n = 1$ 時, $\frac{(m+n)!}{(m-n)!} = m(m+1) = m^2 + m$

(2) 設 n 時原式成立

則當 $n+1$ 時,

$$\begin{aligned} \frac{(m+n+1)!}{(m-n-1)!} &= ((\prod_{i=1}^n m^2 + n - i^2 + i))(m+n+1)(m-n) \\ &= (\prod_{i=1}^n m^2 + n - i^2 + i)(m+n+1)(m-n) \\ &= (\prod_{i=1}^{n+1} m^2 + n - i^2 + i) \end{aligned}$$

由數學歸納法知 (a) 對所有 $n \in N$ 成立

當 $i \leq m$ 時

$$m^2 + m \geq m^2 + m - i^2 + i \geq i^2 + i - i^2 + i = 2i$$

$$\therefore (m^2 + m)^n \geq \prod_{i=1}^n (m^2 + m - i^2 + i) \geq \prod_{i=1}^n (2i)$$

$$\Rightarrow (m^2 + m)^n \geq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \geq 2^n n!$$

$$\therefore 2^n n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2 + m)^n$$

□

10. (1) a, b, c 是正數, 且 $a + b + c = 1$

試證明 $(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 + (c + \frac{1}{c})^2 \geq \frac{100}{3}$

(2) a_1, a_2, \dots, a_n 是正數, 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$

試求 $(a_1 + \frac{1}{a_1})^2 + (a_2 + \frac{1}{a_2})^2 + (a_3 + \frac{1}{a_3})^2 + \dots + (a_n + \frac{1}{a_n})^2$ 的最小值

解

$$\begin{aligned} (1) & [(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 + (c + \frac{1}{c})^2][1^2 + 1^2 + 1^2] \\ & \geq (a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 = (1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 \\ & \text{但 } (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})(a + b + c) \\ & \geq (1 + 1 + 1)^2 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{故 } (a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 + (c + \frac{1}{c})^2 \\ & \geq \frac{(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2}{3} \geq \frac{(1+9)^2}{3} = \frac{100}{3} \end{aligned} \quad \square$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \sum_{i=1}^n (a_i + \frac{1}{a_i})^2 - n \\ & \geq (\sum_{i=1}^n (a_i + \frac{1}{a_i}))^2 = (1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i})^2 \\ & \text{但 } (\sum_{i=1}^n a_i^{-1}) = (\sum_{i=1}^n a_i^{-1})(\sum_{i=1}^n a_i) \geq n^2 \\ & \therefore \sum_{i=1}^n (a_i + \frac{1}{a_i})^2 \geq \frac{(1 + \sum_{i=1}^n a_i^{-1})^2}{n} \\ & \geq \frac{(1+n^2)^2}{n} \\ & \text{當 } a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n \text{ 時} \\ & \text{等號成立, 故最小值為 } \frac{(1+n^2)^2}{n} \end{aligned} \quad \square$$

11. 設 p, q, r 是三個滿足 $0 < p, q, r < 1$ 的實數
試證明 $pq + qr + rp - 2pqr < 1$

證明(一)(代數—幾何思維)

令直線方程式為 $y = f(x) = (p + q - 2pq)x + pq - 1$

(將 p, q 視為固定的實數)

將 $x = 0, 1$ 代入得 $f(0) = pq - 1 < 0$

$f(1) = p + q - pq - 1 = -(p-1)(q-1) < 0$

所以此直線在 $[0, 1]$ 區間之值恆為負數

因此 $0 < r < 1$

$f(r) = (p + q - 2pq)r + pq - 1 < 0$

$\Rightarrow pr + qr + pq - 2pqr - 1 < 0$

故得證 $pq + qr + rp - 2pqr < 1$ \square

證明(二)(不等式思維法)

$1 - (pq + qr + rp - 2pqr)$

$= (1 - pq - r + pqr) + r(-q - p + pq + 1)$

$= (1 - pq)(1 - r) + r(1 - p)(1 - q) > 0$

故得證 $pq + qr + rp - 2pqr < 1$ \square

12. 設 n 是大於 1 的奇數

且 $S(n)$ 表示 n 的所有正因數之和

試證 $S(n) < n\sqrt[3]{n}$

證明 令 $a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_n}$

$$b = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_n^{s_n}$$

其中 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 為相異之質數

$$\text{則 } S(ab) = (1 + p_1 + p_1^2 + p_1^3 + \cdots + p_1^{r_1+s_1})$$

$$\cdot (1 + p_2 + p_2^2 + p_2^3 + \cdots + p_2^{r_2+s_2})$$

$$\cdots (1 + p_n + p_n^2 + p_n^3 + \cdots + p_n^{r_n+s_n})$$

$$\leq (1 + p_1 + p_1^2 + p_1^3 + \cdots + p_1^{r_1})(1 + p_1 + p_1^2 + p_1^3 + \cdots + p_1^{s_1})$$

$$(1 + p_2 + p_2^2 + p_2^3 + \cdots + p_2^{r_2})(1 + p_2 + p_2^2 + p_2^3 + \cdots + p_2^{s_2})$$

$$\cdots (1 + p_n + p_n^2 + p_n^3 + \cdots + p_n^{r_n})(1 + p_n + p_n^2 + p_n^3 + \cdots + p_n^{s_n})$$

$$= S(a)S(b)$$

因此, 我們只需要證明對每一個奇質數 p

$$\text{都有 } S(p) < p\sqrt[3]{p}$$

但此不等式顯然成立

$$\text{因 } (S(p))^3 = (1 + p)^3 \leq \left(\frac{4}{3}p\right)^3 = \frac{64}{27}p^3 < p^4$$

$$\text{故 } S(p) < p\sqrt[3]{p}$$

故得證

□

13. 設 a, b, c, d, e 是實數

$$\text{使得 } a + b + c + d + e = 8$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$$

求 e 之最大值

解 給定方程式可改寫為

$$8 - e = a + b + c + d \dots\dots\dots (1)$$

$$16 - e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \dots\dots\dots (2)$$

由柯西不等式

$$(a + b + c + d) \leq (1 + 1 + 1 + 1)^{\frac{1}{2}}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}$$

再將 (1)(2) 兩式代入上式得

$$(8 - e) \leq (4)^{\frac{1}{2}}(16 - e^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(8 - e) \leq 2\sqrt{(16 - e^2)}$$

$$\text{兩邊平方得 } 64 - 16e + e^2 \leq 4(16 - e^2)$$

$$5e^2 - 16e < 0$$

$$e(5e - 16) \leq 0$$

$$\text{由此可得 } 0 \leq e \leq \frac{16}{5}$$

$$\text{而當 } a = b = c = d = \frac{6}{5} \text{ 時, } e = \frac{16}{5}$$

$$\text{故 } e \text{ 有最大值 } \frac{16}{5}$$

□

14. 試證 若 a, b, c, d, e 都是正整數

$$\text{則 } \frac{a}{b+2c+3d+4e} + \frac{b}{c+2d+3e+4a} + \frac{c}{d+2e+3a+4b} + \frac{d}{e+2a+3b+4c} + \frac{e}{a+2b+3c+4d} \geq \frac{1}{2}$$

解

由柯西不等式得到

當 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ 都是正實數時,

$$\text{則 } (\sum_{i=1}^5 x_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^5 x_i y_i) (\sum_{i=1}^5 \frac{x_i}{y_i}) (*)$$

$$\text{現設 } (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a, b, c, d, e)$$

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (b + 2c + 3d + 4e, c + 2d + 3e + 4a,$$

$$d + 2e + 3a + 4b, e + 2a + 3b + 4c, a + 2b + 3c + 4d)$$

設 A 表示本問題欲證明之不等式左式

則由上式所示, 得

$$A \times 5(ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de)$$

$$\geq (a + b + c + d + e)^2$$

$$\therefore A \geq \frac{(a+b+c+d+e)^2}{5(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)}$$

$$\begin{aligned} \text{但由 } (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (a-e)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 \\ + (b-e)^2 + (c-d)^2 + (c-e)^2 + (d-e)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{得 } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq \frac{1}{2}(ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de)$$

$$\therefore (a + b + c + d + e)^2 \geq \frac{5}{2}(ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de)$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{1}{2}$$

□

15. 設 AD, BE, CF 為銳角 $\triangle ABC$ 的高, 其中 $AB > AC$
 已知直線 EF 與 BC 交於 P , 而過 D 且與 EF 平行的直線分別交
 AC, AB 於 Q, R 且 N 為線段 BC 上的一點, $\angle NQP + \angle NRP < 180^\circ$
 試證 $BN > CN$

證明 顯然 $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$,
 可觀察 B, C, E, F 四點共圓
 故得 $\overline{PB} \cdot \overline{PC} = \overline{PE} \cdot \overline{PF}$ 注意 垂直 $\triangle DEF$ 的外接圓 (稱為 Euler 圓)
 必通過原 $\triangle ABC$ 三邊之中點
 因 M 為 \overline{BC} 之中點
 故 D, M, F, E 四點共圓
 於是有 $\overline{PE} \cdot \overline{PF} = \overline{PD} \cdot \overline{PM}$
 因此可得 $\overline{PB} \cdot \overline{PC} = \overline{PD} \cdot \overline{PM}$ (1)
 另一方面 由於 $\triangle AEF \sim \triangle ABC$
 且 QR 與 EF 平行
 可得 $\angle ABC = \angle AEF = \angle CQD$
 又 $\angle BDR = \angle CDQ$
 可得 $\triangle BDR \sim \triangle QDC$, 因此
 $\overline{DQ} \cdot \overline{DR} = \overline{DB} \cdot \overline{DC}$ (2)
 令 $\overline{MB} = \overline{MC} = a, \overline{MD} = d, \overline{MP} = p$
 則有 $\overline{PB} = p + a, \overline{DB} = a + d, \overline{PC} = p - a, \overline{CD} = a - d, \overline{DP} = p - d$
 由 (1) 式可得
 $(p + a)(p - a) = (p - d)p$
 即 $a^2 = dp$ 於是 $(a + d)(a - d) = (p - d)d$
 此式等價於 $\overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DP} \cdot \overline{DM}$ (3)
 合併 (2)(3) 式即可得證
 $\overline{DQ} \cdot \overline{DR} = \overline{DP} \cdot \overline{DM}$
 由此可知 Q, R, P, M 四點共圓
 因此 $\angle MQP + \angle MRP = 180^\circ > \angle NQP + \angle NRP$

由此可得

N 在圓 $PQMR$ 的内部

故 $N \in MC$ 因此 $BN > CN$

□

[回目錄](#)

第 3 章

函數

1. 設 a, b, c 是實數, $f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = ax + b$, 且 $|f(x)| \leq 1$,
當 $-1 \leq x \leq 1$

(1) 試證 : $|c| \leq 1$

(2) 試證 : 當 $-1 \leq x \leq 1$ 時, $|g(x)| \leq 2$

(3) 設 $a > 0$, 當 $-1 \leq x \leq 1$ 時, $g(x)$ 之最大值為 2, 求 $f(x) = ?$

解 (1) 令 $x = 0 \Rightarrow |f(0)| \leq 1 \Rightarrow |c| = |f(0)| \leq 1$

(2) $\because f(0) = c$

$$f(-1) = a - b + c \Rightarrow f(-1) + f(1) = 2a + 2c = 2a + 2f(0)$$

$$f(1) = a + b + c \Rightarrow a = \frac{f(1) + f(-1) - 2f(0)}{2}, b = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$$

\therefore 當 $-1 \leq x \leq 1$ 時

$$\begin{aligned}
|g(x)| &= |ax + b| \\
&= \left| \frac{1}{2}(f(1) - f(-1) - 2f(0))x + \frac{1}{2}(f(1) - f(-1)) \right| \\
&= \frac{1}{2} |(x+1)f(1) + (x-1)f(-1) - 2xf(0)| \\
&\leq \frac{1}{2} (|x+1||f(1)| + |x-1||f(-1)| + |2x||f(0)|) \quad (\text{三角不等式}) \\
&\leq \frac{1}{2} (|x+1| + |x-1| + 2)(\because |x| \leq 1) \\
&= \frac{1}{2} ((x+1) + (1-x) + 2) \begin{pmatrix} \because x+1 \geq 0, \\ x-1 \geq 0 \end{pmatrix} \\
&= 2
\end{aligned}$$

(2) 之另證: $g(x) = ax + b$

$$\Rightarrow |g(x)| \leq \max\{|g(1)|, |g(-1)|\}, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{而 } |g(1)| = |a + b| \leq |a + b + c| + |-c| = |f(1)| + |c| \leq$$

$$1 + 1 = 2$$

$$|g(-1)| = |-a + b| = |a - b| \leq |a - b + c| + |-c| =$$

$$|f(-1)| + |c| \leq 1 + 1 = 2$$

$$\therefore |g(x)| \leq 2, -1 \leq x \leq 1$$

(3) $\because a > 0$ 時, $g(x) = ax + b$ 在 $-1 \leq x \leq 1$ 時是遞增函數,

且最大值由已知

$$\Rightarrow 2 = g(1) = a + b = (a + b + c) - c = f(1) - f(0)$$

$$\therefore -1 \leq f(0) = f(1) - 2 \leq 1 - 2 = -1 \Rightarrow c = f(0) = -1$$

$$\text{又 } \because -1 \leq x \leq 1 \text{ 時, } |f(x)| \leq 1 \Rightarrow f(x) \geq -1 = c = f(0)$$

$$|f(x)| \leq 1 \Rightarrow f(x) \geq -1 = c = f(0)$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c \geq c$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx \geq 0$$

$$\Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow a = 2$$

$$\therefore f(x) = 2x^2 - 1$$

□

2. 設 $[x]$ 表不超過 x 的最大整數, 若 $x > 0, y > 0, xy = 1$, 試求:

$$f(x, y) = \frac{x+y}{[x][y]+[x]+[y]+1} \text{ 之值域?}$$

解 設 $x \geq y$, 則 $x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ (已知 $x > 0$)

$$\text{當 } x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow f(x, y) = \frac{1+1}{1 \cdot 1 + 1 + 1 + 1} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (1)$$

當 $x > 1 \Rightarrow$ 設 $[x] = n (n \in N), x = x - [x] = a$ 則

$$x = n + a, 0 \leq a < 1 \Rightarrow y = \frac{1}{n+a} < 1 \therefore [y] = 0$$

$$\therefore f(x, y) = \frac{(n+a) + \frac{1}{n+a}}{n+1}$$

\therefore 函數 $g(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $x \geq 1$ 時是遞增函數, 又 $0 \leq a \leq 1$

$$\therefore n + \frac{1}{n} \leq (n+a) + \frac{1}{n+a} < (n+1) + \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{n + \frac{1}{n}}{n+1} \leq f(x, y) \leq \frac{(n+1) + \frac{1}{n+1}}{n+1}$$

$$\text{設 } \begin{cases} a_n = \frac{n + \frac{1}{n}}{n+1} = \frac{n^2+1}{n^2+n} = 1 - \frac{n-1}{n^2+n} \\ b_n = \frac{(n+1) + \frac{1}{n+1}}{n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{則 } a_{n+1} - a_n &= \left[1 - \frac{(n+1) - 1}{(n+1)^2 + (n+1)} \right] - \left[1 - \frac{n-1}{n^2+n} \right] \\ &= \frac{n-1}{n(n+1)} - \frac{n}{(n+2)(n+1)} = \frac{n-2}{n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 > a_2 = a_3, a_3 < a_4 < a_5 < \dots < a_n < \dots$$

$$\text{且 } b_1 > b_2 > \dots > b_n > \dots$$

$$\Rightarrow a_2 = a_3 < a_4 < \dots < a_n \leq f(x, y) \leq b_n < \dots < b_2 < b_1$$

$$\text{即 } \frac{5}{6} = a_2 \leq f(x, y) < b_1 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \dots\dots\dots (2)$$

由 (1)(2) $\Rightarrow f(x, y)$ 之值域為 $\{\frac{1}{2}\} \cup [\frac{5}{6}, \frac{5}{4})$

□

$$3. \text{ 設函數 } f: (0, 1) \rightarrow R \text{ 定義為 } f(x) = \begin{cases} x & (x \notin Q) \\ \frac{p+1}{q} & (x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, \\ & 0 < p < q, p, q \in N) \end{cases}$$

求 $f(x)$ 在區間 $(\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$ 上的最大值?

$$\text{解 } \because \frac{7}{8} < \frac{7+8}{8+9} < \frac{8}{9} \text{ 即 } \frac{7}{8} < \frac{15}{17} < \frac{8}{9}$$

$$\text{由定義知 } f(\frac{15}{17}) = \frac{16}{17},$$

- (1) 若 $x \notin Q, x \in (\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$, 則 $f(x) = x < \frac{8}{9} < \frac{16}{17}$
- (2) 若 $x \in Q, x \in (\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$, 設 $x = \frac{p}{q}$ 其中 $(p, q) = 1, 0 < p < q$
 $\because \frac{7}{8} < \frac{p}{q} < \frac{8}{9} \therefore \begin{cases} 7q < 8p \\ 9p < 8q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7q + 1 \leq 8p \\ 9p + 1 \leq 8q \end{cases}$
 $\Rightarrow 7q + 1 \leq 8p \leq 8 \cdot \frac{8q-1}{9} \Rightarrow 63q + 9 \leq 64q - 8$
 $\Rightarrow q \geq 17$
 $\therefore f(x) = f(\frac{p}{q}) = \frac{p+1}{q} \leq \frac{\frac{8q-1}{9} + 1}{q} = \frac{8q+8}{9q}$
 $= \frac{8}{9} + \frac{8}{9q} \leq \frac{8}{9} + \frac{8}{9 \times 17} = \frac{16}{17}$

由 (1)(2) 討論知: $f(x)$ 在區間 $(\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$ 上的最大值為 $\frac{16}{17}$

□

4. 當 a 為何值時, 不等式

$\log_{\frac{1}{a}} \sqrt{x^2 + ax + 5} + 1 \cdot \log_5 x^2 + ax + 6 + \log_a 3 \geq 0$ 恰有一個解?

解

$\because a$ 為底數 $\therefore 0 < a \neq 1$, 設 $u = x^2 + ax + 5$, 則

$$\text{原式} \Rightarrow \frac{\log_3 \sqrt{u} + 1}{-\log_3 a} \cdot \log_1 u + 1 + \frac{1}{\log_3 a} \geq 0$$

(A) 當 $0 < a < 1$ 時 $\Rightarrow \log_3 u + 1 \cdot \log_5 u + 1 \geq 1 \dots \dots \dots (1)$

當 $u \geq 0$ 時 $\log_3 u + 1$ 與 $\log_5 u + 1$ 均為單調遞增函數

$\therefore f(u) = \log_3 u + 1 \cdot \log_5 u + 1$ 亦為單調遞增函數: $f(4) = \log_3 3 \cdot$

$$\log_5 5 = 1 \therefore (1) \Leftrightarrow u \geq 4$$

即 $x^2 + ax + 5 \geq 4 \Rightarrow$ 不等式有無限多解

(B) 當 $a > 1$ 時 $\Rightarrow \log_3 u + 1 \cdot \log_5 u + 1 \leq 1 \dots \dots \dots (2)$

由 $f(4) = 1$ 知 $(2) \Leftrightarrow 0 \leq u \leq 4$

即 $0 \leq x^2 + ax + 5 \leq 4 \Rightarrow$ 只有當 $x^2 + ax + 5 = 4$ 有唯一解

原不等式恰有一解, 由 $\Delta = a^2 - 4 = 0$ 得 $a = 2$

此時 $0 \leq x^2 + 2x + 5 \leq 4$ 的解為 $x = -1$

由 (1)(2) 討論知 當 $a = 2$ 時, 原不等式恰為一個解

□

5. 設函數 $f(x)$ 滿足: $x \in R, |f(x)| \leq 1$, 且 $f(x + \frac{13}{42}) + f(x) = f(x + \frac{1}{6}) + f(x + \frac{1}{7})$,

試證: $f(x)$ 是週期函數

證明 已知 $x \in R, f(x + \frac{13}{42}) + f(x) = f(x + \frac{1}{6}) + f(x + \frac{1}{7})$
 $\Rightarrow \begin{cases} f(x + \frac{1}{6}) - f(x) = f(x + \frac{13}{42}) - f(x + \frac{1}{7}) \cdots \cdots \cdots (1) \\ f(x + \frac{1}{7}) - f(x) = f(x + \frac{13}{42}) - f(x + \frac{1}{6}) \cdots \cdots \cdots (2) \end{cases}$
 $\therefore (1)$ 之右式就是將 $x + \frac{1}{7}$ (即 $x + \frac{6}{42}$) 代替 (1) 之左式中的 x
 \therefore 今逐次以 $x + \frac{1}{7}$ (即 $x + \frac{6}{42}$) 代替式中的 x
 $\Rightarrow f(x + \frac{1}{6}) - f(x) = f(x + \frac{13}{42}) - f(x + \frac{6}{42}) = f(x + \frac{19}{42}) - f(x + \frac{12}{42})$
 $= \cdots = f(x + \frac{49}{42}) - f(x + \frac{42}{42})$
 將 $f(x + \frac{1}{6})$ 與 $f(x + \frac{42}{42})$ 移項, 可得
 $f(x + \frac{42}{42}) - f(x) = f(x + \frac{49}{42}) - f(x + \frac{7}{42})$
 即 $f(x + 1) - f(x) = f(x + \frac{49}{42}) - f(x + \frac{7}{42}) \cdots \cdots \cdots (A)$
 將 $x + \frac{1}{42}$ 代替 (2) 式中的 x , 可得
 $\Rightarrow f(x + \frac{7}{42}) - f(x + \frac{1}{42}) = f(x + \frac{14}{42}) - f(x + \frac{8}{42}) \cdots \cdots \cdots (3)$
 再逐次以 $x + \frac{7}{42}$ 代替 (3) 式中的 x
 $\Rightarrow f(x + \frac{14}{42}) - f(x + \frac{8}{42}) = f(x + \frac{21}{42}) - f(x + \frac{15}{42})$
 $\Rightarrow f(x + \frac{21}{42}) - f(x + \frac{15}{42}) = f(x + \frac{28}{42}) - f(x + \frac{22}{42})$
 $\Rightarrow \cdots \cdots$
 $= f(x + \frac{42}{42}) - f(x + \frac{36}{42}) = f(x + \frac{49}{42}) - f(x + \frac{43}{42})$
 $\therefore f(x + \frac{7}{42}) - f(x + \frac{1}{42}) = f(x + \frac{49}{42}) - f(x + \frac{43}{42})$
 將 $f(x + \frac{7}{42})$ 與 $f(x + \frac{43}{42})$ 移項, 可得
 $f(x + \frac{49}{42}) - f(x + \frac{7}{42}) = f(x + \frac{43}{42}) - f(x + \frac{1}{42}) \cdots \cdots \cdots (B)$
 由 $(A)(B) \Rightarrow f(x + 1) - f(x) = f(x + \frac{43}{42}) - f(x + \frac{1}{42}) - \cdots - (4)$
 逐次以 $x + \frac{1}{42}$ 帶替 (4) 式中的 x , 可得
 $f(x + \frac{43}{42}) - f(x + \frac{1}{42}) = f(x + \frac{44}{42}) - f(x + \frac{2}{42})$
 $f(x + \frac{44}{42}) - f(x + \frac{2}{42}) = f(x + \frac{45}{42}) - f(x + \frac{3}{42})$
 \vdots
 $f(x + \frac{83}{42}) - f(x + \frac{41}{42}) = f(x + \frac{84}{42}) - f(x + \frac{42}{42}) = f(x + 2) - f(x + 1)$

$$\begin{aligned}
&\therefore f(x+1) - f(x) = f(x+2) - f(x+1) \\
&\Rightarrow f(x+1) - f(x) \\
&\quad = f(x+2) - f(x+1) \\
&\quad = f(x+3) - f(x+2) \\
&\quad \vdots \\
&\quad = f(x+n) - f(x+(n-1)) \\
&\Rightarrow f(x+n) - f(x) = (f(x+h) - f(x+n-1)) + \cdots + (f(x+3) - f(x+2)) + (f(x+2) - f(x+1)) \\
&\quad = n(f(x+1) - f(x)) \\
&\Rightarrow |f(x+n) - f(x)| = n|f(x+1) - f(x)| \\
&\Rightarrow |f(x+1) - f(x)| \leq \frac{1}{n}(|f(x+n)| + |f(x)|) \leq \frac{2}{n}, n \in N \\
&\Rightarrow |f(x+1) - f(x)| = 0 \\
&\text{即 } f(x+1) = f(x), \quad x \in R \therefore f(x) \text{ 是週期函數} \quad \square
\end{aligned}$$

6. 設 $f(x) = (a-1)x^2 + 2x + 2$, 試在下列條件下求實數 a 之範圍:

(1) 對任意實數 $x, f(x) > 0$ 恆成立

(2) 對區間 $[-1, 1]$ 中的所有實數 $x, f(x) > 0$ 恆成立

解 (1) $f(x) = (a-1)x^2 + 2x + 2, x \in R$

當 $a = 1$ 時, $f(x) = 2x + 2$, 當 $x \in R, f(x)$ 不恆大於 0

當 $a < 1$ 時, $f(x) = (a-1)x^2 + 2x + 2$ 之圖形開口向下,
故 $f(x)$ 不恆大於 0

當 $a > 1$ 時, $f(x) = (a-1)x^2 + 2x + 2$ 之圖形開口向上

\therefore 當判別式 $D = 2^2 - 4(a-1)2 = 12 - 8a < 0$

即 $a > \frac{3}{2}$ 時 $f(x) > 0$ 恆成立

(2) $f(x) = (a-1)x^2 + 2x + 2, x \in [-1, 1]$

當 $a = 1$ 時, $f(x) = 2x + 2 \therefore f(-1) = 0 \therefore f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 不恆大於 0

當 $a < 1$ 時, $f(x) = (a-1)x^2 + 2x + 2$, $\therefore f(-1) = a-1 < 0$

$\therefore f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 不恆大於 0

當 $a > 1$ 時, $f(x) = (a-1)x^2 + 2x + 2$ 在 $x \in [-1, 1]$ 是開口向上的拋物線的一段

對稱軸為 $x = \frac{1}{1-a}$

若 $\frac{1}{1-a} < -1 \Leftrightarrow a < 2$

此時 $f(-1) > 0$

$\therefore a > 1 \Rightarrow 1 < a < 2 \dots\dots\dots (1)$

若 $-1 \leq \frac{1}{1-a} \leq 1 \Leftrightarrow a \geq 2$

此時判別式 $D = 4 - 4 \cdot (a-1) \cdot 2 < 0$

$\Leftrightarrow a > \frac{3}{2} \Rightarrow a \geq 2$

若 $\frac{1}{1-a} < -1 \Leftrightarrow a < 0$,

$f(x)$ 之圖形開口向下

$\therefore f(x)$ 不恆大於 0

由 (1) \cup (2) \Rightarrow 當 $a \in (1, \infty)$ 時, $f(x)$ 在 $x \in [-1, 1]$ 恆大於 0 □

7. 設 $A = \{a | a = 7p, p \in N\}$, $N = \{\text{自然數}\}$, 在 A 上定義函數 f 如下:

若 $a \in A$, 則 $f(a) = a$ 之數字和,

例如: $f(7) = 7, f(14) = 5, f(21) = 3, \dots$

設函數 $f(x)$ 之值域為 $f(A)$, 試證: $f(A) = \{n | n \in N, n \geq 2\}$

證明 (\Rightarrow) 先証 $f(A) \subseteq \{n | n \in N, n \geq 2\}$

在 $f(A)$ 中任取一點 x , 即 x 是被 7 整除的正整數的數字和,

$\therefore 7 \nmid 10^n, n = 0, 1, 2, \dots \therefore x$ 的數字和是大於 1 的正整數

$\Rightarrow x \in \{n | n \in N, n \geq 2\} \Rightarrow f(A) \subseteq \{n | n \in N, n \geq 2\} \dots\dots\dots (1)$

(\Leftarrow) 再証 $\{n | n \in N, n \geq 2\} \subseteq f(A)$

在 $\{n | n \in N, n \geq 2\}$ 中任取一數 x , 即 x 是大於 1 的正整數

< i >

當 $x = 2k, (k \in N)$ 時, $\therefore 7|1001 = 7 \times 143$

\therefore 取 $\underbrace{a = 10011001 \cdots 1001}_{k \text{ 個 } 1001}$ 則 $7|a$

且 $f(a) = 2k \Rightarrow x \in f(A)$

< ii >

當 $x = 2k + 1, (k \in N)$ 時, $\therefore 7|1001 = 7 \times 143$ 且 $7|21$

\therefore 取 $\underbrace{b = 10011001 \cdots 1001}_{k-1 \text{ 個 } 1001} 21$ 則 $7|b$

且 $f(b) = 2(k-1) + 3 = 2k - 1 \Rightarrow x \in f(A)$

由 < i > < ii > 知 $\{n|n \in N, n \geq 2\} \subseteq f(A) \dots\dots\dots (2)$

由 (1)(2) 知 $f(A) = \{n|n \in N, n \geq 2\}$

□

8. 設 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$
 定義 $f_n(x) = \underbrace{f(f(f \cdots f(x) \cdots))}_{n \text{ 個 } f}, n \in N$

(1) 求 $f_{2001}(\frac{2}{15}) = ?$

(2) 若 $B = \{x|f_{15}(x) = x, x \in [0, 1]\}$, 求證: B 中至少含有 9 個元素

証明 (1) 由已知可得:

$$f_1(\frac{2}{15}) = \frac{2}{15} + \frac{1}{2} = \frac{19}{30}$$

$$f_2(\frac{2}{15}) = f(\frac{19}{30}) = 2(1 - \frac{19}{30}) = \frac{11}{15}$$

$$f_3(\frac{2}{15}) = f(\frac{11}{15}) = 2(1 - \frac{11}{15}) = \frac{8}{15}$$

$$f_4(\frac{2}{15}) = f(\frac{8}{15}) = 2(1 - \frac{8}{15}) = \frac{14}{15}$$

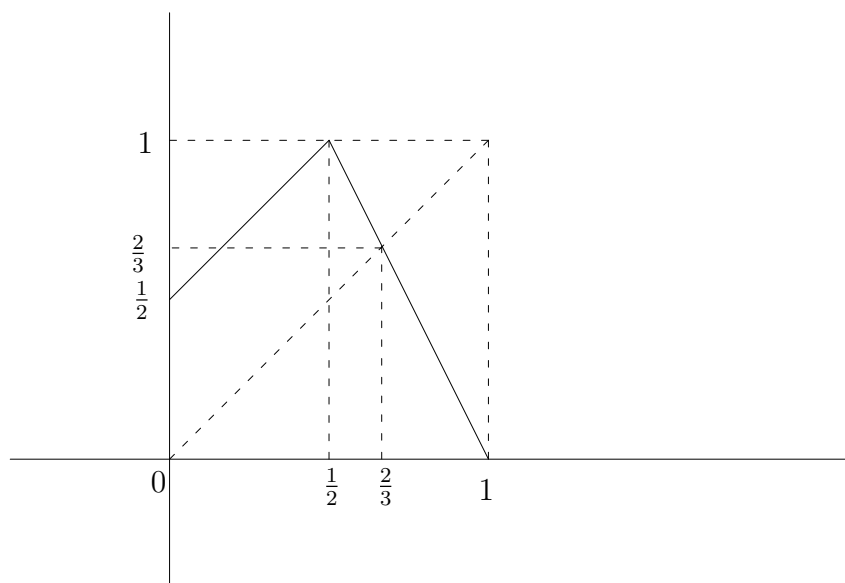
$$f_5(\frac{2}{15}) = f(\frac{14}{15}) = 2(1 - \frac{14}{15}) = \frac{2}{15}$$

$$f_6(\frac{2}{15}) = f(\frac{2}{15}) = \frac{19}{30}$$

\therefore 對 $f_n(\frac{2}{15})$ 而言, 是以 5 為週期循環變化的, 即

$$f_{5k+r}(\frac{2}{15}) = f_r(\frac{2}{15}) \therefore f_{2001}(\frac{2}{15}) = f_{5 \times 400 + 1}(\frac{2}{15}) = f_1(\frac{2}{15}) = \frac{19}{30} \quad \square$$

- (2) 設 $A = \{\frac{2}{15}, \frac{19}{30}, \frac{11}{15}, \frac{8}{15}, \frac{14}{15}\}$ 由 (1) 知, $\forall a \in A \Rightarrow f_5(a) = a$
 $\Rightarrow f_{15}(a) = a \Rightarrow A \subseteq B \dots\dots\dots (a)$
 $\therefore A \subseteq B$



- 由 $f(x)$ 之圖形知 $f(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3} \therefore f_{15}(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3} \therefore \frac{2}{3} \in B \dots\dots\dots (b)$
 設 $C = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, 由 $f(0) = \frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}) = 1, f(1) = 0$
 $\therefore \forall c \in C \Rightarrow f_3(c) = c \Rightarrow f_{15}(c) = c \Rightarrow C \subseteq B \dots\dots\dots (c)$
 由 (a)(b)(c) 知 $\{\frac{2}{15}, \frac{19}{30}, \frac{11}{15}, \frac{8}{15}, \frac{14}{15}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{2}, 1\} \subset B \therefore B$ 中至少含有 9 個元素 □

9. 求所有實數 P , 使函數 $f(x) = \frac{2(1-P)+\cos x}{P-\sin^2 x}$ 的值域包含區間 $[1, 2]$?

解 設 $y \in [1, 2]$, 只需求 P 使方程式

$$yP - y\sin^2 x - \cos x + 2(P - 1) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

存在一個實數解 x , 使得 $\sin^2 x \neq P$

令 $t = \cos x$, 則原題 \Leftrightarrow 求所有實數 P , 使 $\forall y \in [1, 2]$,

$$\text{方程式 } yt^2 - t + (P - 1)(y + 2) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

有一實數根 t_0 , 使得 $t_0^2 \neq 1 - P$ 且 $t_0 \in [-1, 1]$

若 $t_0^2 = 1 - P$, 則由 (2) 知 $t_0 = -2(1 - P) \Rightarrow 4(1 - P)^2 = 1 - P$

$\Rightarrow P = 1$ 或 $\frac{3}{4}$

當 $P = 1$ 時, (2) 式之根為 $t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{y} \in [\frac{1}{2}, 1] \subset [-1, 1]$

$\therefore P = 1$ 滿足條件 (i)

當 $P = \frac{3}{4}$ 時, (2) 式之根為 $t_1 = \frac{-1}{2}, t_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{y} \in [1, \frac{3}{2}] \not\subset [-1, 1]$

$\therefore P = \frac{3}{4}$ 不滿足條件 (ii)

當 $P \neq 1$ 且 $P \neq \frac{3}{4}$ 時, (2) 式有實根之條件為 $D = 1 + 4y(y + 2)(1 - P) \geq 0$

依題意, 要求 $P \leq 1 + \frac{1}{32} = \frac{33}{32}$ (iii)

又 $g(t) = yt^2 - t + (P - 1)(y + 2)$ 之對稱軸為 $t = \frac{1}{2y} \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \subset [-1, 1]$

$\therefore g(t) = 0$ 有一根 $t_0 \in [-1, 1]$ 之條件為 $g(-1) \geq 0$ 或 $g(1) \geq 0$

$\Rightarrow P \geq 1 - \frac{y+1}{y+2} = 1y + 2$ 對每個 $y \in [1, 2]$ 都要成立 $\Rightarrow P \geq \frac{1}{3}$ (iv)

由 (i)(ii)(iii)(iv) 知 $P \in [\frac{1}{3}, \frac{33}{32}]$ 但 $P \neq \frac{3}{4}$ □

10. 設函數 $f: R \rightarrow R$, 且 $f(x) + c \cdot f(2 - x) = (x - 1)^3$, 其中 c 為給定的實數, 求 $f(x) = ?$

解 已知 $f(x) + c \cdot f(2 - x) = (x - 1)^3$ (1)

以 $2 - x$ 代替 $x \Rightarrow f(2 - x) + c \cdot f(x) = (1 - x)^3$ (2)

當 $c \neq \pm 1 \Rightarrow f(x) = \frac{(1-x)^3}{c-1}$

當 $c = 1 \Rightarrow (1 - x)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$ 不存在函數 $f: R \rightarrow R$ 滿足 (1)

當 $c = -1 \Rightarrow$ (1) 式化為 $f(x) - f(2 - x) = (x - 1)^3$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \frac{1}{2}(f(x) - f(2 - x)) + \frac{1}{2}(f(x) + f(2 - x)) \\ &= \frac{1}{2}(x - 1)^3 + \frac{1}{2}(f(1 + (x - 1)) + f(1 - (x - 1))) \end{aligned}$$

令 $g(x) = \frac{1}{2}(f(1 + x) + f(1 - x)), x \in R$ 則

$$g(-x) = \frac{1}{2}(f(1 - x) + f(1 + x)) = g(x) \therefore g(x) \text{ 是偶函數}$$

此時 $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^3 + g(x - 1)$ (3)

$$\begin{aligned} \therefore f(2 - x) &= \frac{1}{2}(f(2 - x) - 1)^3 + g((2 - x) - 1) \\ &= \frac{1}{2}(1 - x)^3 + g(1 - x) \end{aligned} \text{ (4)}$$

$$(3) - (4) \Rightarrow f(x) - f(2-x) = \left[\frac{1}{2}(x-1)^3 - \frac{1}{2}(1-x)^3 \right] + [g(x-1) - g(1-x)]$$

$\therefore g(x)$ 是偶函數

$$\therefore g(x-1) = g(-(x-1)) = g(1-x) \text{ 即 } g(x-1) - g(1-x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(2-x) = (x-1)^3 \therefore (3) \text{ 是 (1) 的解 (當 } c = -1 \text{ 時)}$$

由上述討論得函數方程之解為:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)^3}{c-1} & (\text{當 } c \neq \pm 1) \\ \text{無解} & (\text{當 } c = 1) \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + g(x-1) & (\text{當 } c = -1) \end{cases} \quad (\text{其中 } g(x) \text{ 是 } R \rightarrow R \text{ 的任一偶函數})$$

□

11. 設 $f(x) = \sum_{k=2}^{1000} [\sqrt[k]{x}]$, $g(x) = \sum_{k=2}^{1000} [\log_k x]$, 試證: $f(1000) = g(1000)$

解

$$\text{設 } 2^{k_2} \leq 1000 < 2^{k_2+1}$$

$$3^{k_3} \leq 1000 < 3^{k_3+1}$$

\vdots

$$1000^{k_{1000}} \leq 1000 < 1000^{k_{1000}+1}, \text{ 其中 } k_2, k_3, \dots, k_{1000} \in N$$

$$\text{則 } k_2 \leq \log_2 1000 < k_2 + 1$$

$$k_3 \leq \log_3 1000 < k_3 + 1$$

\vdots

$$k_{1000} \leq \log_{1000} 1000 < k_{1000} + 1$$

$$\therefore g(1000) = k_2 + k_3 + \dots + k_{1000}$$

$$\text{設 } A_n = \{1, 2, \dots, [\sqrt[n]{1000}]\},$$

$$\text{則 } A_n \text{ 的元素個數} = |A_n| = [\sqrt[n]{1000}], n \in \{2, 3, \dots\}$$

$$\text{則 } f(1000) = |A_2| + |A_3| + \dots + |A_{1000}|$$

$$\therefore 1 \in A_n, n = 2, 3, \dots, 1000 \therefore 1 \text{ 在 } f(1000) \text{ 中共計算了 } 999 \text{ 次}$$

$$\text{當 } 2 \leq n \leq k_2 \text{ 時, } \therefore 2^{k_2} \leq 1000 < 2^{k_2+1} \therefore 2 \leq \sqrt[k_2]{1000} \text{ 且 } 2 > \sqrt[k_2+1]{1000}$$

$$\Rightarrow 2 \in A_n, n = 2, 3, \dots, k_2 \text{ 而當 } n > k_2 \text{ 時, } 2 \notin A_n$$

$$\therefore 2 \text{ 在 } f(1000) \text{ 中共計算了 } k_2 - 1 \text{ 次}$$

$$\text{同理 } 3 \text{ 在 } f(1000) \text{ 中共計算了 } k_3 - 1 \text{ 次}$$

\vdots

$$\begin{aligned}
 & 1000 \text{ 在 } f(1000) \text{ 中共計算了 } k_{1000} - 1 \text{ 次} \\
 \Rightarrow f(1000) &= 999 + (k_2 - 1) + (k_3 - 1) + \cdots + (k_{1000} - 1) \\
 &= 999 + (k_2 + k_3 + \cdots + k_{1000}) - 999 = g(1000)
 \end{aligned}$$

□

12. 設 $a_n = [\sqrt{2}n]$, 試証: 在數列 $\langle a_n \rangle$ 中有無限多個項是 2 的整數次方 (即 2^{k+1} 的形式)

解

$$\begin{aligned}
 & \text{欲証存在無限多個 } n, \text{ 使 } [\sqrt{2}n] = 2^{k+1} \text{ 形式, 即 } 2^{k+1} < \sqrt{2}n < 2^{k+1} + 1 \\
 \Rightarrow 2^k \cdot \sqrt{2} < n < 2^k \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & \Rightarrow [2^k \cdot \sqrt{2}] = n - 1 \\
 \text{令 } \{x\} = x \text{ 的小數部分, 則 } 2^k \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} &= (n - 1) + \{2^k \cdot \sqrt{2}\} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \therefore n < (n - 1) + \{2^k \cdot \sqrt{2}\} + \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{ 即 } \{2^k \cdot \sqrt{2}\} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \dots \dots \dots (1) \\
 \text{因此, 若能証明存在無限多個自然數 } k, & \text{ 使 (1) 成立, 則原題得証} \\
 \therefore \{2\sqrt{2}\} = 0.8 \cdots > \frac{1}{2} \text{ 即當 } k = 1 \text{ 時, } \{2^k \cdot \sqrt{2}\} & \geq \frac{1}{2} \dots \dots \dots (2) \text{ 成立} \\
 \text{設只有有限多個自然數 } k \text{ 使 (2) 成立, 且這些 } k & \text{ 中的最大數為 } k, \\
 \Rightarrow \{2^{k_1} \cdot \sqrt{2}\} \geq \frac{1}{2} \\
 \therefore \forall m \in N, \{2^{k_1+m} \cdot \sqrt{2}\} < \frac{1}{2} & \because \sqrt{2} \notin Q \therefore \{2^k \cdot \sqrt{2}\} \geq \frac{1}{2} \\
 \text{設 } 0 < \{2^{k_1+1} \cdot \sqrt{2}\} = \alpha < \frac{1}{2} \quad \therefore \{x\} < \frac{1}{2} & \Rightarrow \{2x\} = 2\{x\} \\
 \therefore \forall m \in N, 0 < \{2^{k_1+m} \cdot \sqrt{2}\} = \{2^{m-1} \cdot \alpha\} < \frac{1}{2} & \text{ 不恆成立} \\
 \therefore \text{有無限多個自然數 } k, \text{ 使 } \{2^k \cdot \sqrt{2}\} & \geq \frac{1}{2} > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
 \text{令 } n = [2^k \cdot \sqrt{2}] + 1 \text{ 則 } 2^k \cdot \sqrt{2} < n < 2^k \cdot \sqrt{2} & + \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \Rightarrow 2^{m+1} < \sqrt{2}n < 2^{m+1} + 1 \Rightarrow [\sqrt{2}n] &= 2^{k+1}
 \end{aligned}$$

□

13. 設 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$,
其中 $a_i \in \{-1, 1\}, i = 1, 2, \dots, n$
若 $f(x) = 0$ 的根都是實數, 求所有的 n 與對應的 $f(x)$?

解

設 $f(x) = 0$ 之根為 x_1, x_2, \dots, x_n

由“根與係數之關係”

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = a_2 \\ \vdots \\ x_1x_2 \cdots x_n = (-1)^n a_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n)$$

$$= a_1^2 - 2a_2 \geq 0$$

$$\because a_1, a_2 \in \{-1, 1\} \therefore a_1 = 1, a_2 = -1$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 - 2(-1) = 3$$

由“平均平等式”

$$\frac{3}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \geq \sqrt[n]{(x_1x_2 \cdots x_n)^2} = \sqrt[n]{|a_n|^2} = 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore n \leq 3$$

當 $n = 3$ 時 (1)之等號成立 $\Leftrightarrow |x_1| = |x_2| = |x_3| = 1$

從 $(x-1)^3, (x+1)^3, (x-1)^2(x+1), (x-1)(x+1)^2$ 中檢驗, 滿足已知條件的有:

$$(x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$\text{與 } (x-1)(x+1)^2 = x^3 + x^2 - x - 1$$

當 $n = 2$ 時 從 $x^2 + x + 1, x^2 + x - 1, x^2 - x + 1, x^2 - x - 1$ 中檢驗, 滿足已知條件的有:

$$x^2 + x - 1 \text{ 與 } x^2 - x - 1$$

當 $n = 1$ 時 有兩個多項式滿足已知條件, 即 $x + 1, x - 1$

由以上討論知 $n = 1$ 時 $f(x) = x + 1$ or $x - 1$

$$n = 2 \text{ 時 } f(x) = x^2 + x - 1 \text{ or } x^2 - x - 1 \quad \square$$

$$n = 3 \text{ 時 } f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \text{ or } x^3 + x^2 - x - 1$$

14. 設函數 $f(X)$ 定義在 N 上, 且 $f(n+2) + f(n+1) = 2f(n) + 2^n$,
 $f(1) = 0, f(2) = 1$, 求 $f(n) = ?$

解 $\because 2^n = f(n+2) + f(n+1) - 2f(n)$

$$= (f(n+2) + 2f(n+1)) - (f(n+1) + 2f(n))$$

令 $g(n) = f(n+1) + 2f(n)$, 則

$$g(1) = 1 \text{ 且 } g(n+1) - g(n) = 2^n$$

$$\Rightarrow g(2) - g(1) = 2^1$$

$$g(3) - g(2) = 2^2$$

$$g(4) - g(3) = 2^3$$

$$\vdots$$

$$g(n) - g(n-1) = 2^{n-1}$$

以上式子相加, 得

$$g(n) - g(1) = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 2$$

$$\therefore g(n) = 2^n - 1$$

$$\text{即 } f(n+1) + 2f(n) = 2^n - 1 \Rightarrow \frac{f(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{f(n)}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\text{令 } h(n) = \frac{f(n)}{2^n}, \text{ 則 } h(1) = \frac{0}{2^1} = 0, \text{ 且}$$

$$\Rightarrow h(2) + h(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}$$

$$h(3) + h(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$h(n) + h(n-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$$

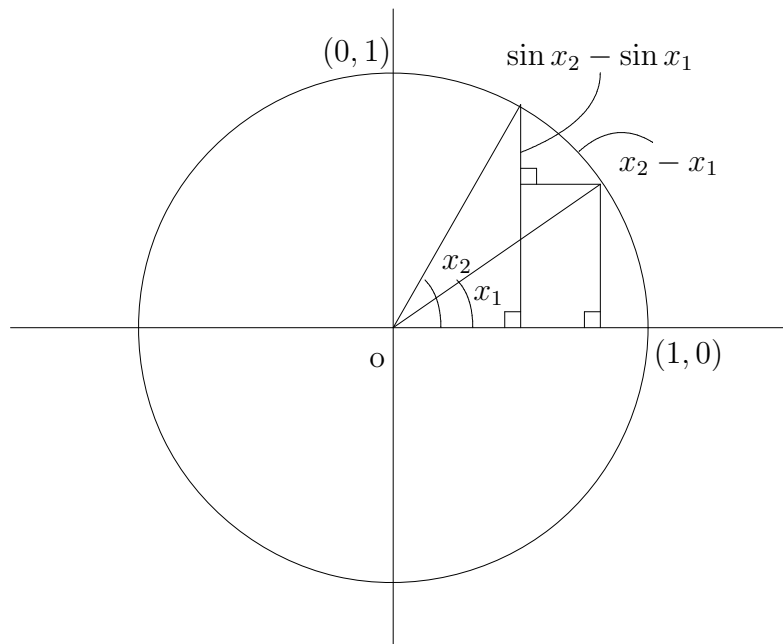
$$\therefore \text{當 } n = \text{奇數時} \Rightarrow h(n) = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n-1}-1}{3 \cdot 2^n}$$

$$\text{當 } n = \text{偶數時} \Rightarrow h(n) = -\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n-1}{3 \cdot 2^n}$$

$$\therefore f(n) = 2^n \cdot h(n) = \begin{cases} \frac{2^{n-1}-1}{3 \cdot 2^n} n \text{ 爲奇數} \\ \frac{2^n-1}{3 \cdot 2^n} n \text{ 爲偶數} \end{cases} \quad \square$$

15. 設 $x, y \in R, x^3 + \sin x - 2a = 0, 4y^3 + \sin y \cdot \cos y + a = 0$, 求 $\cos(x+2y) = ?$

解



令 $f(x) = x^3 + \sin x - 2a$

$$\because |\sin x_2 - \sin x_1| = |2 \cos \frac{x_1+x_2}{2} \sin \frac{x_1-x_2}{2}| \leq |x_1 - x_2|$$

\therefore 當 $\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2$ 或 $x_1 < x_2 \leq \frac{-\pi}{2}$ 時

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 + \sin x_1 - \sin x_2$$

$$\leq (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + |x_1 - x_2|$$

$$= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1)$$

$$\because \frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \text{ 或 } x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 > 1$$

$$\therefore x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1 > 0$$

$$\text{又 } x_1 - x_2 < 0 \therefore f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow \forall x \in [\frac{\pi}{2}, \infty) \cup (-\infty, \frac{-\pi}{2}],$$

$F(x)$ 為嚴格遞增函數 (1)

$\because y_1 = x^3$ 與 $y_2 = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 都是嚴格遞增函數

$\therefore f(x) = x^3 + \sin x - 2a$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 也是嚴格遞增函數 (2)

由(1)(2)知 $f(x) = x^3 + \sin x - 2a$ 是嚴格遞增函數 $\forall x \in R$

$$\text{由已知條件} \Rightarrow f(x) = f(-2y) = 0$$

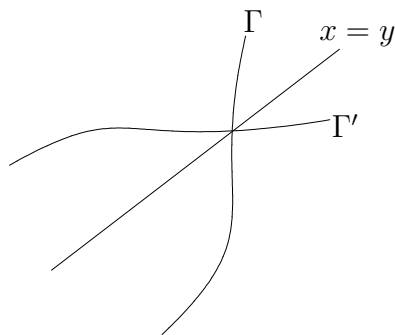
$$\Rightarrow x = -2y \Rightarrow x + 2y = 0$$

$$\therefore \cos(x + 2y) = \cos 0 = 1$$

□

16. 設函數 $y = \sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ 知圖形為 Γ , Γ 關於直線 $x = y$ 之對稱軸圖形為 Γ' , 試求 Γ 與 Γ' 之交點座標?

解



\therefore 圖形 Γ 與 Γ' 對稱軸 $x = y \Rightarrow$

$\therefore \Gamma$ 與 Γ' 之交點即為 Γ 與 $x = y$ 之交點

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = \sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \dots \dots \dots (1)$$

解此方程式時, 若採”兩邊平方”的方法, 過程太複雜,

$$\therefore \text{建構一個輔助方程式: } \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \times \frac{\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x} = \sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = \sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \dots \dots \dots (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow x - \frac{1}{x} + 1 = 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{令 } \sqrt{x - \frac{1}{x}} = a \text{ 則 } (3) \Rightarrow a^2 + 1 = 2a \Rightarrow (a - 1)^2 = 0$$

$$\therefore \sqrt{x - \frac{1}{x}} = a = 1 \xrightarrow{\text{平方}} x - \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ 但 } x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > 0 \therefore \text{負不何}$$

即 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ \therefore 交點座標為 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ □

17. 已知非負實數 a, b, c 滿足 $a + b + c = 1$, 對正數 x_1, x_2, x_3 ,

$$\text{令 } \begin{cases} y_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ y_2 = ax_2 + bx_3 + cx_1 \\ y_3 = ax_3 + bx_1 + cx_2 \end{cases} \quad \text{試證: } y_1 y_2 y_3 \geq x_1 x_2 x_3$$

解 利用“柯西不等式”

$$\because a + b + c = 1$$

$$\therefore y_1 y_2 y_3 = (ax_1 + bx_2 + cx_3)(ax_2 + bx_3 + cx_1) \cdot$$

$$(ax_3 + bx_1 + cx_2) \cdot (a + b + c)$$

$$\geq (a\sqrt{x_1 x_2} + b\sqrt{x_2 x_3} + c\sqrt{x_1 x_3})^2 \cdot (a\sqrt{x_3} + b\sqrt{x_1} + c\sqrt{x_2})^2$$

$$\geq (a\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3} + b\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3} + c\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3})^4$$

$$= (\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3})^4 (a + b + c)^4 = (x_1 x_2 x_3) \cdot 1^4 = x_1 x_2 x_3$$

$$\text{即 } y_1 y_2 y_3 \geq x_1 x_2 x_3 \quad \square$$

18. 設 $x^2 + y^2 = 2$, 則 $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10$ 之最大值為? 此時 $x = ?$ $y = ?$

解 (方法一) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = 2 + 6x + 2y + 10 = 12 + 2(3x + y)$

$$\text{由“柯西不等式”} \Rightarrow (3^2 + 1^2) \cdot (x^2 + y^2) \geq (3x + y)^2$$

$$\Rightarrow -\sqrt{20} \leq 3x + y \leq \sqrt{20}$$

$$\therefore x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 \leq 12 + 2\sqrt{20} = 12 + 4\sqrt{5} \dots \text{此即最大值}$$

$$\text{此時 } \frac{x}{3} = \frac{y}{1} \stackrel{\text{令}}{=} t \Rightarrow x = 3t, y = t \text{ 代入 } x^2 + y^2 = 2$$

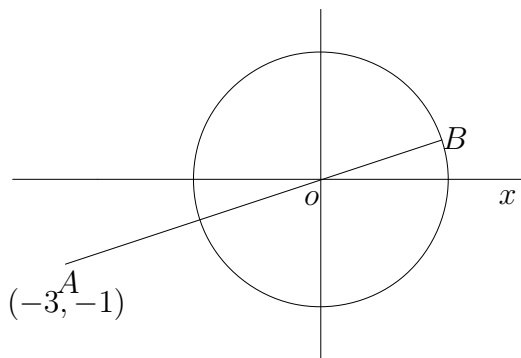
$$\Rightarrow 9t^2 + t^2 = 10t^2 = 2 \therefore t^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ 或 } \frac{-1}{\sqrt{5}} (\text{不合})$$

$$\therefore x = 3t = \frac{3}{\sqrt{5}}, y = t = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \square$$

$$\text{(方法二) } x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = (x + 3)^2 + (y + 1)^2 \stackrel{\text{令}}{=} d$$

則題目轉化為“在以 o 為圓心, $\sqrt{2}$ 為半徑的圓周上找一點 $B(x, y)$,

使 B 與 $A(-3, -1)$ 之距離達到最大”



如圖所示:可知當 \overline{AB} 通過圓心 o 時發生最大值

$$\because \overline{Ao} = \sqrt{10}, \overline{oB} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{Ao} : \overline{oB} = \sqrt{5} : 1$$

$$\text{由“內分點公式”} \Rightarrow 0 = \frac{A + \sqrt{5}B}{\sqrt{5} + 1}$$

$$\Rightarrow B = [(\sqrt{5} + 1) \cdot (0, 0) - (-3, -1)] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\text{即當 } x = \frac{3}{\sqrt{5}}, y = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ 時, } x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 \text{ 有最大值 } \overline{AB}^2 = 12 + 4\sqrt{5}$$

□

19. 已知函數 $f(x) = ax^2 - b$, 滿足 $-4 \leq f(1) \leq -1, -1 \leq f(2) \leq 5$, 求 $f(3)$ 之範圍?

解 (方法一) $\because \begin{cases} f(1) = a - b \\ f(2) = 4a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4f(1) - f(2) = -3b \\ \therefore b = \frac{1}{3}[f(2) - 4f(1)] \Rightarrow a = \frac{1}{3}[f(2) - f(1)] \end{cases}$

$$\Rightarrow f(3) = 9a - b = 3[f(2) - f(1)] - \frac{1}{3}[f(2) - 4f(1)] = \frac{8}{3}f(2) - \frac{5}{3}f(1)$$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{8}{3} \leq \frac{8}{3}f(2) \leq 40 \\ \frac{5}{3} \leq -\frac{5}{3}f(1) \leq 20 \end{cases} \text{ 相加 } \Rightarrow -1 \leq f(3) \leq 20$$

□

(方法二) $\because \begin{cases} f(1) = a - b \\ f(2) = 4a - b \end{cases}$

\therefore 可將 $f(1), f(2)$ 視為二維空間(即 ab 平面)上的兩個向量

而 $f(3) = 9a - b$ 為 ab 平面上之另一向量,

故 $f(3)$ 可以表示為 $f(1)$ 與 $f(2)$ 之線性組合

\therefore 可設 $f(3) = \alpha f(1) + \beta f(2)$

$$\Rightarrow 9a - b = \alpha(a - b) + \beta(4a - b) = (\alpha + 4\beta)a - (\alpha + \beta)b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + 4\beta = 9 \\ \alpha + \beta = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{-5}{3} \\ \beta = \frac{8}{3} \end{array} \right. \therefore f(3) = \frac{8}{3}f(2) - \frac{5}{3}f(1)$$

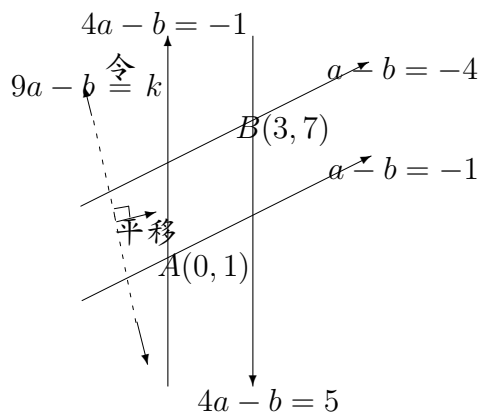
$$\left. \begin{array}{l} \because \frac{-8}{3} \leq \frac{8}{3}f(2) \leq 403 \\ \frac{5}{3} \leq \frac{-5}{3}f(1) \leq 203 \end{array} \right\} \text{相加} \Rightarrow -1 \leq f(3) \leq 20$$

□

(方法三) 線性規劃

$$f(1) = a - b, f(2) = 4a - b, f(3) = 9a - b$$

$$\Rightarrow -4a \leq a - b \leq -1, -1 \leq 4a - b \leq 5$$

$$\Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline (a, b) & f(3) = 9a - b \\ \hline (0, 1) & -1 \cdots \min \\ \hline (3, 7) & 20 \cdots \max \\ \hline \end{array}$$


$$\therefore -1 \leq f(3) \leq 20$$

□

20. 設 $n \in \mathbb{N}$, 試證: $\frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \frac{[3x]}{3} + \cdots + \frac{[nx]}{n} \leq [nx]$

證明 令 $A_t = \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \cdots + \frac{[tx]}{t}, t = 1, 2, \dots, n$

當 $t = 1$ 時, $A_t = A_1 = [x] \leq [1 \cdot x] \therefore$ 原式成立

設 $t \leq k$ 時, $A_t \leq [tx]$ 成立 (即 $A_1 \leq [x], A_2 \leq [2x], \dots, A_k \leq [kx]$)

$$\because A_1 = [x]$$

$$2(A_2 - A_1) = [2x]$$

$$3(A_3 - A_2) = [3x]$$

$$\vdots$$

$$k(A_k - A_{k-1}) = [kx]$$

$$(k+1)(A_{k+1} - A_k) = [(k+1)x]$$

$$\begin{aligned} \text{相加} \Rightarrow (k+1)A_{k+1} - (A_1 + A_2 + \cdots + A_k) \\ = [x] + [2x] + \cdots + [(k+1)x] \end{aligned}$$

$$\therefore \forall x, y \in R \Rightarrow [x] + [y] \leq [x+y] \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} \therefore (k+1)A_{k+1} &= (A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_k) + [x] + [2x] + [3x] \\ &\quad + \cdots + [kx] + [(k+1)x] \\ &\leq ([x] + [2x] + [3x] + \cdots + [kx]) \\ &\quad + ([kx] + [(k-1)x] + [(k-2)x] \\ &\quad + \cdots + [x]) + [(k+1)x] (\because \text{歸納法假設}) \\ &= ([x] + [kx]) + ([2x] + [(k-1)x]) \\ &\quad + ([3x] + [(k-2)x]) + \cdots + ([kx] + [x]) + [(k+1)x] \\ &\leq [(k+1)x] + [(k+1)x] + [(k+1)x] \\ &\quad + \cdots + [(k+1)x] + [(k+1)x] (\because (1)) \\ &= (k+1)[(k+1)x] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_{k+1} \leq [(k+1)x] \text{ 即 } \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \cdots + \frac{[(k+1)x]}{k+1} \leq [(k+1)x]$$

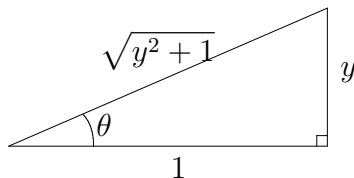
\therefore 由數學歸納法知:

$$\frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \frac{[3x]}{3} + \cdots + \frac{[nx]}{n} \leq [nx] \text{ 成立}$$

□

21. 設 $x \in R$, 求函數 $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x - 2}$ 之最大、最小值?

解 (方法一)



$$\begin{aligned}
& \text{兩邊同乘 } \cos x - 2 \Rightarrow y \cos x - 2y = \sin x + 1 \\
& \Rightarrow y \cos x - y \sin x = 1 + 2y \\
& \Rightarrow \sqrt{y^2 + 1}(\sin \theta \cos x - \cos \theta \sin x) = 1 + 2y \\
& \Rightarrow \sqrt{y^2 + 1} \sin(\theta - x) = 1 + 2y \\
& \Rightarrow |\sin(\theta - x)| = \frac{|1 + 2y|}{\sqrt{y^2 + 1}} \leq 1 \\
& \Rightarrow \sqrt{y^2 + 1}^2 \geq |1 + 2y|^2 \\
& \Rightarrow (4y^2 + 4y + 1) - (y^2 + 1) = 3y^2 + 4y \leq 0 \\
& \Rightarrow \frac{-4}{3} \leq y \leq 0
\end{aligned}$$

□

(方法二) 令 $\tan \frac{x}{2} = t \in R$, 則 $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

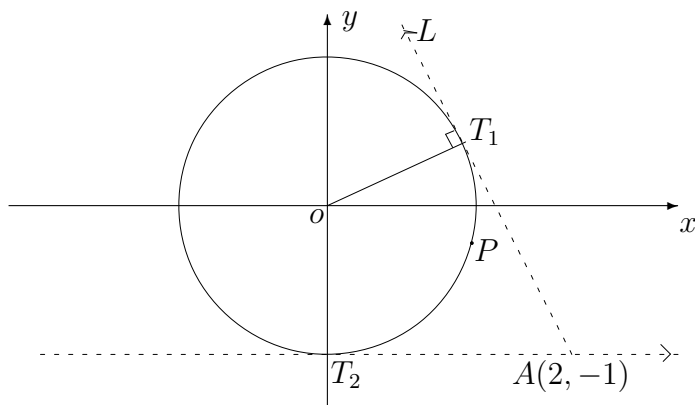
$$\begin{aligned}
& \text{原式} \Rightarrow y = \frac{\frac{2t}{1+t^2} + 1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - 2} = \frac{t^2 + 2t + 1}{-1 - 3t^2} \\
& \Rightarrow -y - 3yt^2 = t^2 + 2t + 1 \Rightarrow (3y + 1)t^2 + 2t + (1 + y) = 0 \\
& \because t \in R \text{ (即方程式有實根)} \therefore D = 4 - 4(3y + 1)(1 + y) \geq 0 \\
& \Rightarrow (3yy^2 + 4y + 1) - 1 \leq 0 \Rightarrow 3y(y + \frac{4}{3}) \leq 0 \Rightarrow \frac{-4}{3} \leq y \leq 0
\end{aligned}$$

□

(方法三) y 可以看成點 $P(\cos cx, \sin cx)$ 與 $A(2, -1)$ 之連線斜率

但 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 在單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上運動

如下圖:



設過 A 之切線 $L: y - (-1) = m(x - 2)$ (點斜式)

$$\Rightarrow mx - y - (1 + 2m) = 0$$

\therefore 圓心 O 至切線 L 之距離 = 半徑

$$\therefore \frac{|-(1+2m)|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \xrightarrow{\text{平方}} m^2 + 1 = 4m^2 + 4m + 1 \Rightarrow 3m(m + \frac{4}{3}) = 0$$

$\therefore m = 0$ or $\frac{-4}{3}$ 由上圖知 \overleftrightarrow{AP} 之斜率 y 介於 m_{AT_1} 與 m_{AT_2} 之間
即 $\frac{-4}{3} \leq y \leq 0$ □

22. 求函數 $y = x - \sqrt{x^2 - 1}$ 之值域

解 (方法一) 利用“單調性”

$$\begin{aligned} \text{當 } x_1 < x_2 \leq 1 \text{ 時 } &\Rightarrow (x_1 - \sqrt{x_1^2 - 1}) - (x_2 - \sqrt{x_2^2 - 1}) \\ &= (x_1 - x_2) + (\sqrt{x_2^2 - 1} - \sqrt{x_1^2 - 1}) \\ &= (x_1 - x_2) + \frac{x_2^2 - x_1^2}{\sqrt{x_2^2 - 1} + \sqrt{x_1^2 - 1}} \\ &= (x_1 - x_2) \left[1 - \frac{x_2 + x_1}{\sqrt{x_2^2 - 1} + \sqrt{x_1^2 - 1}} \right] \\ &= (x_1 - x_2) \cdot \frac{(\sqrt{x_2^2 - 1} - x_2) + (\sqrt{x_1^2 - 1} - x_1)}{\sqrt{x_2^2 - 1} + \sqrt{x_1^2 - 1}} \\ &= \text{負} \cdot \frac{(\text{正}) + (\text{正})}{\text{正}} < 0 \end{aligned}$$

$\therefore y = x - \sqrt{x^2 - 1}$ 是遞增函數

當 $x = -1$ 時, $y = -1 \Rightarrow y \leq -1 (x \leq -1) \dots\dots\dots (1)$

$$\begin{aligned}
 \text{當 } x_4 > x_3 \geq 1 \text{ 時 } &\Rightarrow (x_4 - \sqrt{x_4^2 - 1}) - (x_3 - \sqrt{x_3^2 - 1}) \\
 &= (x_4 - x_3) + (\sqrt{x_3^2 - 1} - \sqrt{x_4^2 - 1}) \\
 &= (x_4 - x_3) + \frac{x_3^2 - x_4^2}{\sqrt{x_3^2 - 1} + \sqrt{x_4^2 - 1}} \\
 &= (x_4 - x_3) + \frac{(x_3 - x_4)(x_3 + x_4)}{\sqrt{x_3^2 - 1} + \sqrt{x_4^2 - 1}} \\
 &= (x_4 - x_3) \cdot \frac{(\sqrt{x_3^2 - 1} - x_3) + (\sqrt{x_4^2 - 1} - x_4)}{\sqrt{x_3^2 - 1} + \sqrt{x_4^2 - 1}} \\
 &= \text{正} \cdot \frac{(\text{負}) + (\text{負})}{\text{正}} < 0
 \end{aligned}$$

$\therefore y = x - \sqrt{x^2 - 1}$ 是遞減函數

當 $x = 1$ 時 $y = 1 \therefore y \geq 1$

又 $y = x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \Rightarrow 0 < y \leq 1 \quad (x \geq 1) \dots\dots\dots (2)$

$\therefore y = x - \sqrt{x^2 - 1}$ 之定義域為

$\{x | x^2 \geq 1\} = \{x | x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1\} \dots\dots\dots (3)$

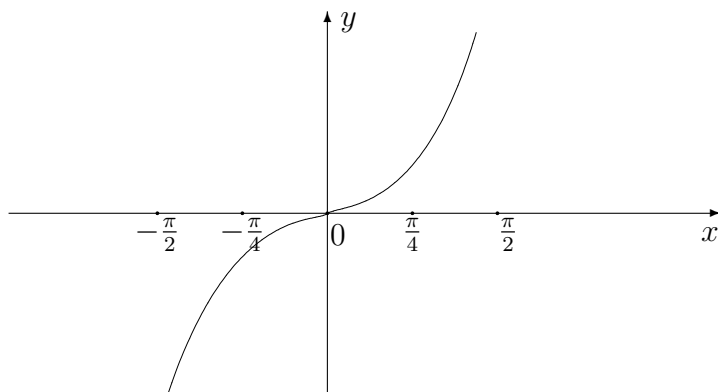
\therefore 由 (1)(2)(3) 之討論知: $x = 1$ 時 y 有最大值 1, 但 y 無最小值 \square

(方法二) $\therefore x \geq 1$ or $x \leq -1 \therefore$ 可令 $x = \sec\theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$

則 $y = \sec\theta - \tan\theta = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$

$\therefore \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \in (0, \frac{\pi}{4}] \cup (\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{4}]$

由 $y = \tan x$ 之圖形



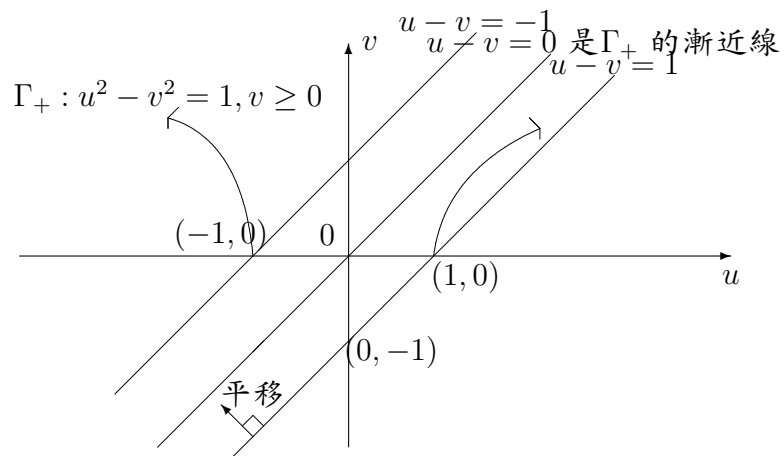
知 $y \leq -1$ or $0 < y \leq 1$

\therefore 當 $x = 1$ 時 y 有最大值 1, 但 y 無最小值

□

(方法三) 令 $u = x, v = \sqrt{x^2 - 1} \geq 0$

則 $u^2 - v^2 = 1, y = u - v$



\Rightarrow 由“線性歸劃”之概念知 $0 < y \leq 1$ or $y \leq -1$

\therefore 當 $x = 1$ 時 y 有最大值 1, 但 y 無最小值

□

23. 設 x, y, z 均為正數, 且 $x + y + z = 1$

- (1) 求 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$ 的最小值
- (2) 求 $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1}$ 之最大值
- (3) 求 $\sqrt[3]{3x+7} + \sqrt[3]{3y+7} + \sqrt[3]{3z+7}$ 之最大值

解

- (1) 利用”柯西不等式”

$$\Rightarrow [(\sqrt{\frac{1}{x}})^2 + (\sqrt{\frac{4}{y}})^2 + (\sqrt{\frac{9}{z}})^2][\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} + \sqrt{z^2}] \geq (\sqrt{1} + \sqrt{4} + \sqrt{9})^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \geq \frac{6^2}{1} = 36$$

當 $(x, y, z) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ 時, 原式之最小值為 36

□

- (2) 利用”柯西不等式”

$$\Rightarrow (\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1})^2 \leq [(\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{y+1})^2 + (\sqrt{z+1})^2] \cdot (1^2 + 1^2 + 1^2)$$

$$= 3(x + y + z + 3) = 3(1 + 3) = 12$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} \leq 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{當 } \frac{\sqrt{x+1}}{1} = \frac{\sqrt{y+1}}{1} = \frac{\sqrt{z+1}}{1} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3} \text{ 時,}$$

原式之最大值為 $2\sqrt{3}$

□

- (3) 利用”柯西不等式”

$$\therefore \sqrt[3]{3x+7} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} \leq \frac{1}{3}[(3x+7) + 8 + 8] = x + \frac{23}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{3x+7} \leq \frac{x + \frac{23}{3}}{4} = \frac{x}{4} + \frac{23}{12}$$

$$\text{同理 } \sqrt[3]{3x+7} \leq \frac{y}{4} + \frac{23}{12}$$

$$\sqrt[3]{3x+7} \leq \frac{z}{4} + \frac{23}{12}$$

$$\therefore \sqrt[3]{3x+7} + \sqrt[3]{3y+7} + \sqrt[3]{3z+7} \leq \frac{1}{4}(x + y + z) + \frac{23}{4} = \frac{1}{4} + \frac{23}{4} = 6$$

$\therefore \text{當 } \sqrt[3]{3x+7} = \sqrt[3]{3y+7} = \sqrt[3]{3z+7} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3} \text{ 時, 原式有最大值 6}$

□

24. 設 $0 < a \neq 1$, 試求 k 值, 使方程式 $2\log_a(x - ak) = \log_a(x^2 - a^2)$ 有

解

$$\text{解 (方法一) 原式} \Leftrightarrow \begin{cases} x - ak > 0 \\ x^2 - a^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - ak > 0 \cdots \cdots (1) \\ 2kx = a(1 + k^2) \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

$\therefore a > 0 \therefore \text{當 } k = 0 \text{ 時, (2) 式無解}$

當 $k \neq 0$ 時 $\Rightarrow x = \frac{a(1+k^2)}{2k}$ 代入 (1) $\Rightarrow \frac{a(1+k^2)}{2k} - ak > 0$

即 $\frac{1+k^2}{2k}k = \frac{1-k^2}{2k} > 0 \Leftrightarrow k(1-k)(1+k) > 0$

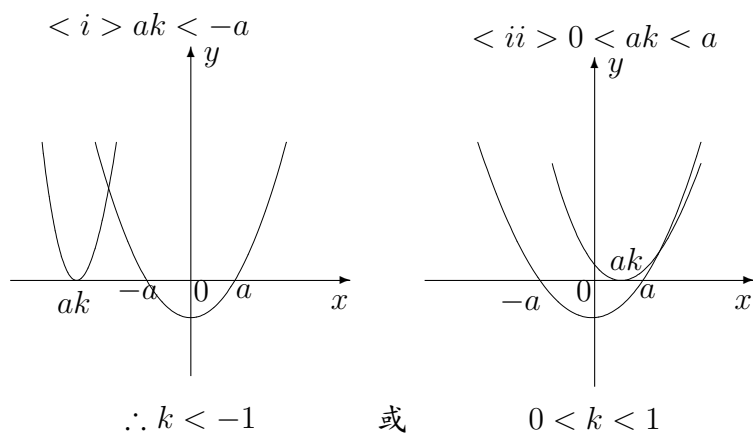
$\therefore k < -1$ or $0 < k < 1$

□

(方法二) 作函數 $y = (x - ak)^2$ 與 $y = x^2 - a^2$ ($y \geq 0$) 之圖形

則其交點之 x 座標即為原方程式的解, 而

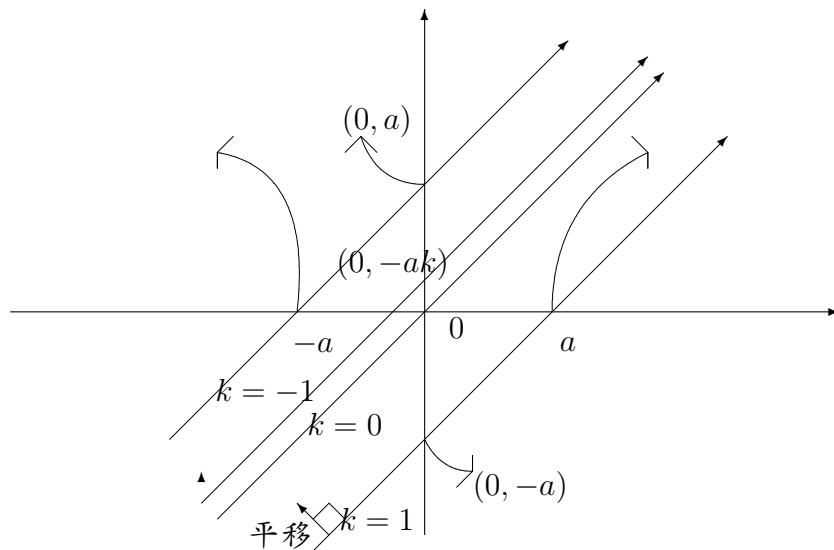
要使交點之 x 座標 $x > ak$, 只有兩種可能



□

(方法三) \therefore 原方程式 $\Leftrightarrow \log_a(x - ak) = \log_a \sqrt{x^2 - a^2}$

即 $x - ak = \sqrt{x^2 - a^2}$, 作函數 $y = x - ak, y = \sqrt{x^2 - a^2}$ 之圖形



$$y = x - ak \text{ (斜率} = 1 \text{)}$$

\Rightarrow 兩圖形有交點時, 截距 $-ak$ 滿足下列條件:

$$-ak > a, \text{ 或 } -a < -ak < 0 \quad (a > 0)$$

即 $k < -1$ 或 $0 < k < 1$

□

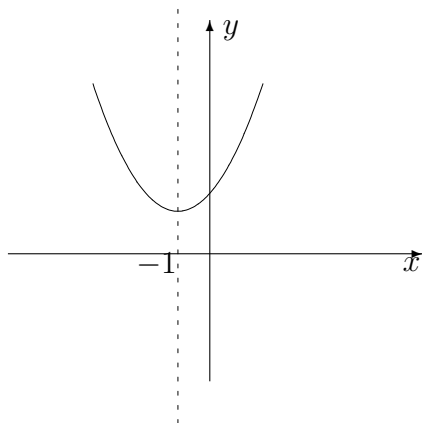
25. 設函數 $f(x) = x^2 + bx + c$, 若 $f(-1+x) = f(-1-x)$, $f(0) = 4$, 當 $x > 0$ 時, 比較 $f(\log_b x)$ 與 $f(\log_c x)$ 之大小

解 $\because f(-1+x) = f(-1-x) \therefore f(x)$ 之圖形對稱於 $x = -1$

$$\text{即 } x = \frac{-b}{2} = -1 \Rightarrow b = 2$$

$$\because f(0) = 4 \Rightarrow 4 = 0^2 + 0 \cdot b + c \Rightarrow c = 4$$

$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 4$ 其圖形如下:



先比較 $\log_2 x$ 與 $\log_4 x$ 之大小:

$$\because \log_4 x = \frac{1}{2} \log_2 x$$

\therefore 當 $x \geq 1$ 時, $\log_2 x \geq \log_4 x \geq 0$, 由上圖知: $f(\log_2 x) \geq f(\log_4 x)$

當 $0 < x < 1$ 時, $\log_2 x < \log_4 x < 0$, 還要比較二者與 -1 之大小:

$$(1) \text{ 若 } 0 < x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \log_2 x < \log_4 x \leq -1 \Rightarrow f(\log_2 x) > f(\log_4 x)$$

$$(2) \text{ 若 } \frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow -1 \leq \log_2 x < \log_4 x \Rightarrow f(\log_2 x) < f(\log_4 x)$$

$$(3) \text{ 若 } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 x < -1 < \log_4 x < 0,$$

必須再比較 $\log_2 x$ 與 $\log_4 x$ 與 -1 的距離

$$\begin{aligned} < i > \quad -1 - \log_2 x = \log_4 x - (-1) \Rightarrow \log_2 x + \log_4 x = \log_4 x^3 = \\ & \quad -2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \end{aligned}$$

$$\text{此時 } f(\log_2 x) = f(\log_4 x)$$

$$< ii > \quad -1 - \log_2 x > \log_4 x - (-1) \Rightarrow \frac{1}{4} < x < \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

$$\text{此時 } f(\log_2 x) > f(\log_4 x)$$

$$< iii > \quad -1 - \log_2 x < \log_4 x - (-1) \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{16}} < x < \frac{1}{2}$$

$$\text{此時 } f(\log_2 x) < f(\log_4 x)$$

由以上討論知: 當 $x = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ 時, $f(\log_2 x) = f(\log_4 x)$

當 $x \in (0, \sqrt[3]{\frac{1}{16}}) \cup [1, \infty]$ 時, $f(\log_2 x) > f(\log_4 x)$

當 $x \in (\sqrt[3]{\frac{1}{16}}, 1)$ 時, $f(\log_2 x) < f(\log_4 x)$

□

26. 求函數 $y = \frac{2x}{x^2+1}$ 之最大值與最小值

解 (方法一) 兩邊同乘以 $(x^2 + 1)$

$$\Rightarrow yx^2 + y = 2x \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0$$

$$\because x \in \mathbb{R} \therefore D = 4 - 4y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$$

□

(方法二) 分段討論

$$\text{當 } x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\text{當 } x > 0 \Rightarrow y = 2 \times \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \because x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2 \therefore y \leq 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{當 } x < 0 \Rightarrow y = -2 \times \frac{1}{(-x) + (-\frac{1}{x})} \because (-x) + (-\frac{1}{x}) \geq 2\sqrt{(-x)(-\frac{1}{x})} = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2 \therefore y = 2 \times \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \geq 2 \times \frac{1}{-2} = -1$$

由以上討論知: $-1 \leq y \leq 1$

□

(方法三) 令 $x = \tan \theta$, 則

$$y = \frac{2 \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} = \sin 2\theta \because |\sin 2\theta| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$$

□

(方法四) 幾何意義

$$y = 2 \times \frac{x-0}{x^2 - (-1)} = 2m_{AP}$$

m_{AP} : 表 \overline{AP} 之斜率, 其中 $A = (-1, 0)$

而 $P(x^2, x)$ 表拋物線 $\Gamma_0: y^2 = x$ 上之動點

$\therefore m_{L2} \leq m_{AP} \leq m_{L1}$, $L1$ 與 $L2$ 為過 $A(-1, 0)$ 與 Γ_0 相切之直線

\therefore 可令 $L_i: y - 0 = m(x + 1) \quad i = 1, 2$

$$\text{代入 } \Gamma_0 \Rightarrow m^2(x+1)^2 = x \Rightarrow m^2x^2 + (2m^2 - 1)x + m^2 = 0$$

$$\because \text{相切} \therefore D = 0 \text{ 即 } 4m^4 - 4m^2 + 1 - 4m^4 = 0$$

$$\therefore m^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \text{ or } -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{-1}{2} \leq y = 2m_{AP} \leq 2 \times \frac{1}{2} \text{ 即 } -1 \leq y \leq 1$$

□

27. 已知 A, B, C 均為銳角, $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1$

求證: $\frac{\pi}{2} < A + B + C < 3 \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$

證明 $\because \sin^2 A = 1 - \sin^2 B - \sin^2 C = \cos^2 B - \sin^2 C$
 $= \cos(B+C) \cdot \cos(B-C)$
 $\because 0 < B, C < \frac{\pi}{2} \therefore \cos(B-C) > 0$
 $\therefore \cos(B+C) = \frac{\sin^2 A}{\cos(B-C)} \therefore \cos(B+C) > 0$ 即 $0 < B+C < \frac{\pi}{2}$
 $\because A$ 為銳角 $\therefore 0 < A+B+C < \pi$
 又 $\sin^2 A = \cos(B+C) \cos(B-C) >$
 $\cos^2(B+C) = \sin^2(\frac{\pi}{2} - B - C) \dots\dots\dots (1)$
 $\therefore 0 < A, \frac{\pi}{2} - B - C < \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (2)$
 由 (1)(2) $\Rightarrow A > \frac{\pi}{2} - B - C \Rightarrow A+B+C > \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (3)$
 $\because y = \cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 圖形下凹, $A+B, B+C, C+A$ 均為銳角
 $\therefore 3 \cos \frac{2(A+B+C)}{3} \geq \cos(A+B) + \cos(B+C) + \cos(C+A) \dots\dots\dots (\star)$
 $\geq \cos(A+B) \cos(A-B) + \cos(B+C) \cos(B-C)$
 $+ \cos(C+A) \cos(C-A)$
 $= \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$
 5 即 $3[1 - 2 \sin^2 \frac{(A+B+C)}{3}] \geq [1 - 2 \sin^2 A] + [1 - 2 \sin^2 B] + [1 - 2 \sin^2 C]$
 $\Rightarrow 3 \sin^2 \frac{A+B+C}{3} \leq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1$
 $\Rightarrow \sin^2 \frac{A+B+C}{3} \leq \frac{1}{3}$ 即 $A+B+C \leq 3 \sin^{-1} \sqrt{\frac{1}{3}} = 3 \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots (4)$
 由 (3)(4) $\Rightarrow \frac{\pi}{2} < A+B+C < 3 \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \square$

PS. (\star) 式之證明如下:

設 A, B, C, D 均為銳角, 則
 $\left. \begin{array}{l} \cos \frac{A+B}{2} \geq \frac{\cos A + \cos B}{2} \\ \cos \frac{C+D}{2} \geq \frac{\cos C + \cos D}{2} \end{array} \right] \Rightarrow \cos \frac{\frac{A+B}{2} + \frac{C+D}{2}}{2} \geq \frac{\frac{\cos A + \cos B}{2} + \frac{\cos C + \cos D}{2}}{2}$
 $\Rightarrow \cos \frac{A+B+C+D}{4} \geq \frac{1}{4}(\cos A + \cos B + \cos C + \cos D)$ 令 $D = \frac{A+B+C}{3}$
 則 $\cos \frac{A+B+C}{3} \geq \frac{1}{4}(\cos A + \cos B + \cos C + \cos \frac{A+B+C}{3})$
 移項 $\Rightarrow \frac{3}{4} \cos \frac{A+B+C}{3} \geq \frac{1}{4}(\cos A + \cos B + \cos C)$
 $\Rightarrow 3 \cos \frac{A+B+C}{3} \geq \cos A + \cos B + \cos C$

$\because A+B, B+C, C+A$ 均為銳角

$$\therefore 3 \cos \frac{(A+B)+(B+C)+(C+A)}{3} \geq \cos(A+B) + \cos(B+C) + \cos(C+A)$$

$$\text{即 } 3 \cos \frac{2(A+B+C)}{3} \geq \cos(A+B) + \cos(B+C) + \cos(C+A) \quad \square$$

28. 求函數 $y = |\sin x| + \sin^4 2x + |\cos x|$ 之最大值與最小值

解

$$\because f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| + \sin^4(2x + \pi) + \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$= |\cos x| + \sin^4 2x + |\sin x| = f(x)$$

$\therefore \frac{\pi}{2}$ 是函數 $y = f(x)$ 的一個週期 (但不一定是最小週期)

\therefore 只需在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上討論 $f(x)$ 之最大值與最小值即可 (縮小討論範圍)

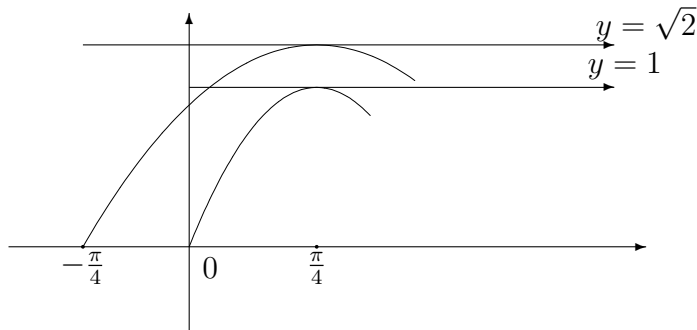
當 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 時, $f(x) = \sin x + \sin^4 2x + \cos x$

$$\therefore f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ 是 $y = f(x)$ 之圖形的一條對稱軸

\therefore 只需在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 找 $y = f(x)$ 之最大值與最小值 (即討論範圍再縮小)



當 $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ 時, $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\because y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 與 $y = \sin^4 2x$ 二者在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 均為單調遞增

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 是單調遞增

$$\therefore f(x) \text{ 之最小值 } = f(0) = 1, f(x) \text{ 之最大值 } = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2} \quad \square$$

29. 任給 13 個不相同的實數, 試證: 其中至少有兩個實數 x_1, x_2 ,
使 $0 < \frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2} < 2 - \sqrt{3}$

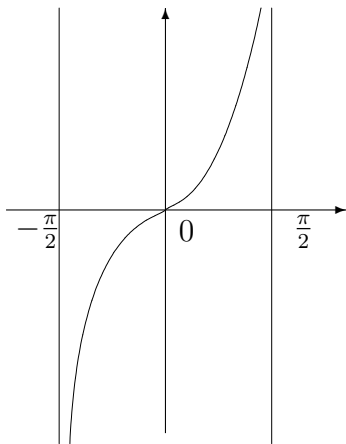
證明 $\because \frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2}, 2 - \sqrt{3}$ 與 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}, \tan 15^\circ$ 相關

\therefore 令 $x_1 = \tan \alpha, x_2 = \tan \beta$, 則

$$0 < \frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2} < 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow 0 < \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} < \tan 15^\circ$$

$$\Leftrightarrow 0 < \tan(\alpha - \beta) < \tan 15^\circ \quad (1)$$

$\because y = \tan x$:



$\therefore x$ 與 $\tan x$ 是一一對應的 $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\therefore (1) \text{ 式 } \Leftrightarrow 0 < \alpha - \beta < 15^\circ$

$\therefore \frac{90^\circ - (-90^\circ)}{12} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ \therefore$ 由 "鴿籠原理" 知:

在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之間必有兩個角 α, β 滿足 $0 < \alpha - \beta < 15^\circ$

\Leftrightarrow 存在兩實數 $x_1 = \tan \alpha, x_2 = \tan \beta$

使 $0 < \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} < \tan 15^\circ$ 成立

$\Leftrightarrow 0 < \frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2} < 2 - \sqrt{3}$ 成立

□

30. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C \geq 60^\circ$, 試証: $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 4 + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}}$

證明 由 "正弦定理" 知: $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$

$$\therefore (a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$$

$$\begin{aligned}
&= (\sin A + \sin B) \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right) \\
&= 2 + \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} + \frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B} \\
&= 4 + \frac{(\sin A - \sin B)^2}{\sin A \sin B} + \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} \\
&= 4 + \frac{8 \cos^2 \frac{A+B}{2} \sin^2 \frac{A-B}{2}}{\cos(A-B) - \cos(A+B)} + \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} \\
&= 4 + \frac{8 \cos^2 \frac{A+B}{2} \sin^2 \frac{A-B}{2}}{\cos(A-B) - \cos(A+B)} + \frac{1 - 2 \sin^2 \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \\
&\quad \left(\because \sin \frac{A+B}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2} \right) \\
&= 4 + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} + 2 \sin^2 \frac{A-B}{4} \cdot \left[\frac{8 \sin^2 \frac{C}{2} \cos^2 \frac{A-B}{4}}{\cos^2 \frac{A-B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \right] \dots \dots \dots (1) \\
&\because 0 < \left| \frac{A-B}{2} \right| < \frac{A+B}{2} < \frac{\pi}{2} \therefore \cos^2 \frac{A-B}{2} > \cos^2 \frac{A+B}{2} = \sin^2 \frac{C}{2} \dots \dots \dots (2) \\
&\text{又 } \angle C \geq 60^\circ \therefore 8 \sin^3 \frac{C}{2} \geq 8 \times \left(\frac{1}{2} \right)^3 = 1 \\
&\therefore 8 \sin^3 \frac{C}{2} \cos^2 \frac{A-B}{4} \geq \cos^2 \frac{A-B}{4} \geq \cos^2 \frac{A-B}{2} \geq \cos^2 \frac{A-B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} \dots \dots (3) \\
&\text{由 (2)(3) 得 } \frac{8 \sin^2 \frac{C}{2} \cos^2 \frac{A-B}{4}}{\cos^2 \frac{A-B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \geq 0 \\
&\text{代入 (1)} \Rightarrow (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 4 + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \quad \square
\end{aligned}$$

PS. 有些同學從”柯西不等式”下手: $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ 代入原式, 將原式簡化為 $(a+b) \cdot \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sin \frac{C}{2}}$, 但代入”正弦定理”即會發現此路不通!

回目錄

第 4 章

數論

1. 對於每個正整數 $n > 1$, 試證: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 不是整數。

證明 設 $H = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 為整數,

設 $[1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n] = l$ (即 l 為 $1, 2, 3, \dots, n$ 的最小公倍數)

$$l \cdot H = \frac{l}{1} + \frac{l}{2} + \frac{l}{3} + \frac{l}{4} + \cdots + \frac{l}{n-1} + \frac{l}{n}$$

$\because n > 1, \therefore 1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n$ 中至少有一個是偶數

$\therefore l = [1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n]$ 為偶數

$\therefore l \cdot H$ 為偶數 (1)

而 $1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n$ 中必有一項 $2^s (s \in \mathbb{N})$,

2^s 為小於或等於 n 中, 只含 2 的因數最大者,

令 $k = 2^s$ (例: 設 $n = 100$, 小於或等於 100 中, 只含 2 的因數最大者為 $2^6 = 64$
 $n = 131$, 小於或等於 131 中, 只含 2 的因數最大者為 $2^7 = 128$)

而 $\therefore l$ 是 $1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n$ 的最小公倍數,

$$\therefore l = 2^t \cdot 3^{p_1} \cdot 5^{p_2} \cdot 7^{p_3} \cdots$$

其中 $\therefore k = 2^s$ 是 2 的因數最大者, $\therefore s = t$,

而其它質因數 $3, 5, 7, \dots$ 皆為奇數,

$$\therefore \frac{l}{k} = \frac{2^t \cdot 3^{p_1} \cdot 5^{p_2} \cdot 7^{p_3} \cdots}{2^t} = 3^{p_1} \cdot 5^{p_2} \cdot 7^{p_3} \cdots \text{ 為奇數,}$$

而其它 $\frac{l}{1}, \frac{l}{2}, \frac{l}{3}, \dots, \frac{l}{n}$ (除了 $\frac{l}{k}$ 外) 皆為偶數,

$$\therefore \frac{l}{1} + \frac{l}{2} + \frac{l}{3} + \cdots + \frac{l}{n} \text{ 為奇數, 矛盾 } (\because (1) \ l \cdot H \text{ 為偶數})$$

$$\therefore \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \text{ 不是整數。} \quad \square$$

2. 設 m, n 皆為質數, 且 $m^2 + 3mn + n^2$ 為完全平方數, 試求出滿足上述條件的所有 m, n 之值。

解 (1) $\because m, n$ 為質數, $\therefore m, n$ 可能是 $2, 3, 6k+1, 6k+5 (k \in N)$

而 $2^2, 3^2, (6k+1)^2, (6k+5)^2$ 除以 6 的餘數分別為 $4, 3, 1, 1$ 。

(2) 而任何正整數除以 6 的餘數可能為 $0, 1, 2, 3, 4, 5$

\therefore 若 $n \in N$, n 可以表示為 $6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5$ 。

而 $(6k)^2, (6k+1)^2, (6k+2)^2, (6k+3)^2, (6k+4)^2, (6k+5)^2$ 除以 6 的餘數分別為 $0, 1, 4, 3, 4, 1$ 。

(3) 經由 (1), (2) 的敘述, 我們來看看 m, n 的可能情形

m	n	m^2 除以 6 的餘數	$3mn$ 除以 6 的餘數	n^2 除以 6 的餘數	$m^2 + 3mn + n^2$ 除以 6 的餘數	可能可以
2	2	4	0	4	2	
2	3	4	0	3	1	*
2	$6k+1$	4	0	1	5	
2	$6k+5$	4	0	1	5	
3	3	3	3	3	3	*
3	$6k+1$	3	3	1	1	*
3	$6k+5$	3	3	1	1	*
$6k+1$	$6k+1$	1	3	1	5	
$6k+1$	$6k+5$	1	3	1	5	
$6k+5$	$6k+5$	1	3	1	5	

$$(4) \text{ (I) } m = 2, n = 3 \text{ (或是 } m = 3, n = 2)$$

$$m^2 + 3mn + n^2 = 4 + 18 + 9 = 31 \text{ (不合)}$$

$$\text{(II) } m = 3, n = 3$$

$$m^2 + 3mn + n^2 = 9 + 27 + 9 = 45 \text{ (不合)}$$

$$\text{(III) } m = 3, n = 6k + 1 \text{ (或是 } m = 6k + 1, n = 3) \text{ } k \in N$$

$$m^2 + 3mn + n^2 = 3^2 + 3 \cdot 3 \cdot (6k + 1) + (6k + 1)^2$$

$$= 9 + 54k + 9 + 36k^2 + 12k + 1$$

$$= 36k^2 + 66k + 19$$

$$= (6k + 5)^2 \text{ 或 } (6k + 7)^2$$

$$\text{當 } 36k^2 + 66k + 19 = (6k + 5)^2$$

$$36k^2 + 66k + 19 = 36k^2 + 60k + 25$$

$$6k = 6, \quad k = 1, \therefore n = 7$$

$$\text{當 } 36k^2 + 66k + 19 = (6k + 7)^2$$

$$36k^2 + 66k + 19 = 36k^2 + 84k + 49$$

$$18k = -30, \quad k = \frac{-5}{3} \text{ (不合)}$$

$$\text{(IV) } m = 3, n = 6k + 5 \quad (k \in N)$$

$$m^2 + 3mn + n^2 = 3^2 + 3 \cdot 3 \cdot (6k + 5) + (6k + 5)^2$$

$$= 9 + 54k + 45 + 36k^2 + 60k + 25$$

$$= 36k^2 + 114k + 54$$

$$36k^2 + 114k + 54 = (6k + 7)^2 \text{ 或 } (6k + 11)^2$$

$$\text{當 } 36k^2 + 114k + 54 = 36k^2 + 84k + 49$$

$$30k = -5 \quad k = -\frac{1}{6} (\text{不合})$$

$$\text{當 } 36k^2 + 114k + 54 = (6k + 11)^2$$

$$= 36k^2 + 132k + 121$$

$$18k = -67 \quad k = -\frac{67}{18} (\text{不合})$$

$$\therefore (m, n) = (3, 7) \text{ 或 } (7, 3)$$

□

3. 試證： $A_n = (2538)^n + (2229)^n + (2001)^n - (90)^n - (675)^n - (529)^n$ 可以被 2737 整除。

證明 (1) $2737 = 7 \times 17 \times 23$, 我們將分別證明 A_n 可以被 7, 17, 23 整除。

(2) 我們將利用乘法公式：

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^{n-1})$$

(3) 我們來看這 6 個數除以 7 的餘數

	2538	2229	2001	90	675	529
除以 7 的餘數	4	3	6	6	3	4

$$\therefore A_n = [(2538)^n - (529)^n] + [(2229)^n - (675)^n] + [(2001)^n - (90)^n]$$

$$= 7 \cdot p + 7 \cdot q + 7 \cdot r \quad p, q, r \in N$$

$$= 7(p + q + r) \quad \therefore A_n \text{ 爲 } 7 \text{ 的倍數}$$

$$\text{其中 } (2538)^n - (529)^n = (2538 - 529)(2538^{n-1} + 2538^{n-2} \cdot 529 + \cdots + 2538 \cdot 529^{n-2} + 529^{n-1})$$

$$\therefore 529, 2538 \text{ 除以 } 7 \text{ 的餘數皆爲 } 4,$$

$\therefore 2538 - 529$ 為 7 的倍數 $\therefore (2538)^n - (529)^n$ 為 7 的倍數

同理 $2229, 675$ 除以 7 的餘數皆為 3,

$\therefore (2229)^n - (675)^n$ 為 7 的倍數

$2001, 90$ 除 7 的餘數為 6,

$\therefore (2001)^n - (90)^n$ 為 7 的倍數。

(4) 再看這 6 個數除以 17 的餘數

	2538	2229	2001	90	675	529
除以 17 的餘數	5	2	12	5	12	2

$\therefore 2538, 90$ 除以 17 的餘數相同,

$\therefore (2538)^n - (90)^n$ 為 17 的倍數

$\therefore 2229, 529$ 除以 17 的餘數相同,

$\therefore (2229)^n - (529)^n$ 為 17 的倍數

$\therefore 2001, 675$ 除以 17 的餘數相同,

$\therefore (2001)^n - (675)^n$ 為 17 的倍數

$\therefore A_n$ 為 17 的倍數

(5) 這些數除以 23 的餘數

	2538	2229	2001	90	675	529
除以 23 的餘數	8	21	0	21	8	0

$\therefore 2538, 675$ 除以 23 的餘數相同,

$\therefore (2538)^n - (675)^n$ 為 23 的倍數

$\therefore 2229, 90$ 除以 23 的餘數相同,

$\therefore (2229)^n - (90)^n$ 為 23 的倍數

$\therefore 2001, 529$ 除以 23 的餘數相同,

$\therefore (2001)^n - (529)^n$ 為 23 的倍數

$\therefore A_n$ 為 23 的倍數

6. $\therefore A_n$ 為 7, 17, 23 的倍數 $\therefore A_n$ 可以被 2737 整除。 \square

4. 設 P 為一質數且 $P > 2$, 令 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{P-1} = \frac{b}{a}$, 其中 a, b 為整數, 試證: $P|b$

證明 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{P-2} + \frac{1}{P-1}$

$$= (1 + \frac{1}{P-1}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{P-2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{P-3}) + \cdots + (\frac{1}{k} + \frac{1}{P-k})$$

$$\left(\begin{array}{l} \because P \text{ 是質數, } \therefore P \text{ 是奇數, 令 } P = 2k + 1, \\ \therefore \text{自 } \frac{1}{1} \text{ 到 } \frac{1}{P-1} \text{ 共有偶數項, 剛好可以兩項一組} \end{array} \right)$$

$$= \frac{P-1+1}{1 \cdot (P-1)} + \frac{P-2+2}{2 \cdot (P-2)} + \frac{P-3+3}{3 \cdot (P-3)} + \cdots + \frac{P-k+k}{k \cdot (P-k)}$$

$$= \frac{P}{1 \cdot (P-1)} + \frac{P}{2 \cdot (P-2)} + \cdots + \frac{P}{k \cdot (P-k)}$$

$$= P \left[\frac{1}{1 \cdot (P-1)} + \frac{1}{2 \cdot (P-2)} + \frac{1}{3 \cdot (P-3)} + \cdots + \frac{1}{k \cdot (P-k)} \right]$$

設 $\frac{1}{1 \cdot (P-1)} + \frac{1}{2 \cdot (P-2)} + \cdots + \frac{1}{k \cdot (P-k)}$

$$= \frac{h}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (P-1)}, \text{ 其中 } h \in N$$

則 $\frac{b}{a} = P \frac{h}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (P-1)}$

$$\Rightarrow b \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (P-1) = Ph a$$

$$\Rightarrow P|b \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (P-1)$$

$$\Rightarrow P|b \quad (\because P \text{ 為質數} \Rightarrow 1, 2, 3, \dots, P-1 \text{ 皆與 } P \text{ 互質})$$

\square

5. 證明：有且僅有一個自然數 n ，使得 $2^8 + 2^{12} + 2^{14} - 2^n$ 為完全平方數。

證明 設 $2^8 + 2^{12} + 2^{14} - 2^n = P^2$ ，其中 $P \in N$

$$\text{則 } 2^8 + 2^{12} + 2^{14} - P^2 = 2^n \quad 2^8(1 + 2^4 + 2^6) - P^2 = 2^n$$

$$2^8(1 + 16 + 64) - P^2 = 2^n$$

$$(2^4 \cdot 9)^2 - P^2 = 2^n$$

$$(144 + P)(144 - P) = 2^n$$

$\Rightarrow 144 + P, 144 - P$ 皆為 2 的某次方，

設 $144 + P = 2^s, \quad 144 - P = 2^t, \quad s, t \in N \quad s > t$

$$\begin{cases} 144 + P = 2^s \cdots \cdots \cdots (1) \\ 144 - P = 2^t \cdots \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 288 = 2^s + 2^t = 2^t(2^{s-t} + 1)$$

$$\Rightarrow 2^5 \cdot 9 = 2^t(2^{s-t} + 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^t = 2^5 \\ 2^{s-t} + 1 = 9 \end{cases} \Rightarrow t = 5, 2^{s-t} = 8 = 2^3$$

$$\Rightarrow s = 8$$

$$\text{所以 } 2^n = 2^s \cdot 2^t = 2^{11}$$

$$\Rightarrow n = 11$$

□

6. 設 n 為正整數， $[x]$ 為高斯符號，表示不大於 x 的最大整數，

$$\text{求證：} [\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}]$$

證明 (1) 先證： $[\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}]$

任意正整數皆可寫成 $4k, 4k+1, 4k+2$ 或 $4k+3$ ，其中 $k \in N \cup \{0\}$ ，

此數的平方為 $16k^2, 16k^2+8k+1, 16k^2+16k+4$ 或 $16k^2+24k+9$ 。

可看出正整數的平方除以 4 的餘數只可能為 0 或 1。

因此 $4n+2, 4n+3$ 必不為完全平方數

$$\Rightarrow \text{存在 } m \in N \text{ 使得 } m^2 < 4n+2 < 4n+3 < (m+1)^2$$

$$\Rightarrow m^2 \leq 4n+1 < 4n+2 < 4n+3 < (m+1)^2$$

$$\Rightarrow m \leq \sqrt{4n+1} < \sqrt{4n+2} < \sqrt{4n+3} < m+1$$

$$\Rightarrow [\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}] = m$$

(2) 易證： $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$ (註)

$$\text{故 } [\sqrt{4n+1}] \leq [\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] \leq [\sqrt{4n+2}]$$

$$\Rightarrow [\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}] (\because (1)) \quad \square$$

註 (i) 先證 $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} > \sqrt{4n+1}$

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{4n+1})^2$$

$$= n + 2\sqrt{n(n+1)} + n + 1 - 4n - 1$$

$$= 2\sqrt{n(n+1)} - 2n$$

$$= 2\sqrt{n(n+1)} - 2\sqrt{n \cdot n} > 0$$

$$\therefore ((\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 > (\sqrt{4n+1})^2$$

$$\because \sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{4n+1} > 0$$

$$\therefore \sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$$

(ii) 再證 $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$ $(\sqrt{4n+2})^2 - (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2$

$$= 4n + 2 - n - 2\sqrt{n(n+1)} - (n + 1)$$

$$= 2n + 1 - 2\sqrt{n(n+1)}$$

$$= \sqrt{4n^2 + 4n + 1} - \sqrt{4n^2 + 4n} > 0$$

$$\therefore (\sqrt{4n+2})^2 > ((\sqrt{n} + \sqrt{n+1}))^2$$

$$\because \sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{4n+2} > 0$$

$$\therefore \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$$

7. 如果 $x^3 + y^3 = z^3$ 有整數解, 試證: x, y, z 這三數中一定有一個是 7 的倍數。

證明 任何數除以 7 的餘數可能為 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

$\therefore x, y, z$ 必為這 7 類, $7k, 7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5, 7k+6$ ($k \in \mathbb{Z}$) 中其中一類,

而不管 x, y, z 是那一類, 將其三次方再除以 7, 得餘數如下:

n	n^3 除以 7 的餘數
$7k$	0
$7k+1$	1
$7k+2$	1
$7k+3$	6
$7k+4$	1
$7k+5$	6
$7k+6$	6

說明: 設 $n = 7k + 6$

$$n^3 = (7k + 6)^3 = 7^3 \cdot k^3 + 3 \cdot 7^2 \cdot k^2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 \cdot k \cdot 6^2 + 6^3$$

$$= 7(7^2 \cdot k^3 + 3 \cdot 7 \cdot k^2 \cdot 6 + 3 \cdot k \cdot 6^2) + 216$$

$$= 7 \cdot P + 7 \cdot 30 + 6 \quad (P \in \mathbb{N})$$

$$= 7 \cdot (P + 30) + 6 \quad \therefore n^3 \text{ 除以 7 餘 } 6$$

\therefore 我們可知 x^3, y^3, z^3 除以 7 的餘數可以是 0, 1, 6,

x^3	y^3	$x^3 + y^3 = z^3$	
0	0	0	x, y, z 皆為 7 的倍數
0	1	1	x 為 7 的倍數, x, y 交換亦同
0	6	6	x 為 7 的倍數, x, y 交換亦同
1	1	2	不合 \because 餘數不會是 2
1	6	0	z 為 7 的倍數
6	6	5	不合 \because 餘數不會是 5

□

8. 將 3^{2001} 乘開之後, 求 3^{2001} 的百位數, 十位數, 個位數的數字分別是多少?

解

利用二項式定理,

$$(x+y)^n = C_0^n + C_1^n x^{n-1}y + C_2^n x^{n-2}y^2 + \dots$$

$$+ C_{n-2}^n x^2 y^{n-2} + C_{n-1}^n x y^{n-1} + C_n^n y^n$$

$$\text{其中 } C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$3^{2001} = 3 \times (3^2)^{1000}$$

$$= 3 \times (10 - 1)^{1000}$$

$$(10 - 1)^{1000} = C_0^{1000} 10^{1000} + C_1^{1000} 10^{999} \cdot (-1) + C_2^{1000} 10^{998} \cdot (-1)^2 + \dots$$

$$+ C_{997}^{1000} 10^3 \cdot (-1)^{997} + C_{998}^{1000} 10^2 \cdot (-1)^{998} + C_{999}^{1000} 10 \cdot (-1)^{999}$$

$$+ C_{1000}^{1000} (-1)^{1000}$$

$$= 1000 \times P + 49950000 - 10000 + 1 \quad (P \in N)$$

$$= 1000(P + 49950 - 10) + 1$$

$$= 1000 \times K + 1 \quad (K \in N)$$

$$(k = P + 49950 - 10)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{其中 } C_0^{1000}10^{1000} + C_1^{1000}10^{999}(-1) + \cdots + C_{997}^{1000} \times 10^3 \cdot (-1)^{997} \\ \because \text{每一項都是 } 10^3 \text{ 的倍數,} \\ \therefore \text{設 } C_0^{1000}10^{1000} + C_1^{1000}10^{999}(-1) + \cdots + C_{997}^{1000} \times 10^3 \cdot (-1)^{997} \\ \quad = 1000 \times P \quad (P \in N) \\ \therefore 3^{2001} = 3 \times (10 - 1)^{1000} \end{array} \right)$$

$$= 3 \times (1000 \times K + 1)$$

$$= 3000 \times K + 3$$

$\therefore 3^{2001}$ 的百位數字是 0, 十位數字是 0, 個位數字是 3。

□

9. 設 n 為正整數, 若 $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ 是一個正整數,
則 $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ 必是一個完全平方數。

解 $\because 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1} \in N$

$$\therefore 2\sqrt{28n^2 + 1} \in N$$

$$\therefore \sqrt{28n^2 + 1} \in N$$

$$\because 28n^2 + 1 \text{ 為奇數} \quad \therefore \sqrt{28n^2 + 1} \text{ 為奇數,}$$

$$\text{設 } \sqrt{28n^2 + 1} = 2m + 1, \quad m \in N$$

$$28n^2 + 1 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$$

$$7n^2 = m(m + 1) \circ$$

$\because 7$ 是質數, 又 $\because m, m + 1$ 互質, $\therefore m, m + 1$ 二數中必有一數為 7 的倍數,

$$(1) \text{ 設 } 7|m, \because m, m + 1 \text{ 互質, 且 } m(m + 1) = 7n^2$$

\therefore 存在二個自然數 a, b 使得

$$\begin{cases} m = 7a^2 \\ m + 1 = b^2 \end{cases} \text{ 代入}$$

$$\therefore 28n^2 + 1 = (2m + 1)^2$$

$$\therefore 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1} = 2 + 2(2m + 1) = 4m + 4 = (2b)^2$$

$\therefore 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ 為完全平方數 \therefore 成立

$$(2) \ 7|m+1, \because m, m+1 \text{ 互質, 且 } m(m+1) = 7n^2$$

\therefore 存在二個自然數 c, d 使得

$$\begin{cases} m+1 = 7d^2 \\ m = c^2 \end{cases}$$

$\therefore c^2 + 1 = m + 1$ 為 7 的倍數, 矛盾

$$\left(\begin{array}{l} \because c^2 + 1 \text{ 為 7 的倍數} \\ c^2 \text{ 除以 7 的餘數是 6,} \\ \text{但 } \because c \text{ 除以 7 的餘數可能是 } 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \text{設 } c = 7k, 7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5, 7k+6 \\ c^2 \text{ 除以 7 的餘數可能是 } 0, 1, 4, 2 \\ \text{不可能是 6, } \therefore \text{ 矛盾} \end{array} \right)$$

$\therefore 7|m+1$ 的情形不存在,

\therefore 在 $7|m$ 的情形下, 若 $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1} \in N$

則 $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ 是一個完全平方數。 □

10. 一位數 2 是 2 的倍數, 二位數 12 是 2^2 的倍數, 三位數 112 是 2^3 的倍數, 四位數 2112 是 2^4 的倍數, 五位數 22112 是 2^5 的倍數, 試確定是否有一個 2001 位數的正整數 A 滿足: A 是 2^{2001} 的倍數, 且 A 的每一位數字都是 1 或 2。

證明 (1) 我們先來看這幾個提供的資料

$$2 = 2 \times 1$$

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$112 = 2^3 \times 14$$

$$2112 = 2^4 \times 132$$

$$22112 = 2^5 \times 691$$

其中 $22112 = 2^5 \times 691$, 若假設我們不知六位數中, "122112" 或

者 "222112" 何者為 2^6 的倍數。

$$\text{設 } a22112 = a \times 100000 + 22112$$

$$= 2^5 \times (3125 \times a + 691)$$

$\therefore a22112$ 必須為 2^6 的倍數,

$\therefore 3125 \times a + 691$ 必須為 2 的倍數,

$\therefore 3125 \times a$ 為奇數

$\Rightarrow a$ 為奇數 $\therefore a = 1$

$\therefore 122112$ 為 2^6 的倍數。

(2) 由 (1) 的推論：設確定有一個正整數 A_n 滿足此條件, 利用數學歸納法來證明,

當 $n = 0$ 時, 2 是 2 的倍數

設 $n = k$ 時成立, 即 A_k 是 2^k 的倍數, 設 $A_k = 2^k \cdot P$ ($P \in N$)

當 $n = k + 1$ 時,

A_{k+1} 等於 $10^k \times a + A_n$, 其中 a 是 1 或 2,

$$\therefore A_{k+1} = 10^k \times a + 2^k \times P$$

我們分 P 為奇數、偶數來討論。

(i) P 是奇數, $\therefore 10^k = (2 \cdot 5)^k = 2^k \cdot 5^k$

$\therefore 10^k$ 必為 2^k 的倍數

$$\therefore 10^k = 2^k \cdot 5^k$$

而 $\therefore 5^k$ 必為奇數,

$$\therefore A_{k+1} = 2^k \cdot 5^k \cdot a + 2^k \cdot P = 2^k(5^k \cdot a + P)$$

$\therefore A_{k+1}$ 為 2^{k+1} 的倍數,

$\therefore 5^k \cdot a + P$ 為偶數,

$\therefore P$ 為奇數, $\therefore 5^k \times a$ 為奇數,

$\therefore a$ 為奇數, $\Rightarrow a = 1$

\therefore 存在 $(k+1)$ 位正整數 A_{k+1} 為 2^{k+1} 的倍數, 其中 A_{k+1} 的每一位數字都是 1 或 2。

(ii) P 是偶數

$\therefore 5^k \cdot a + P$ 為偶數,

$\therefore P$ 為偶數, $\therefore 5^k \times a$ 為偶數,

$\therefore a$ 為偶數, $\Rightarrow a = 2$

\therefore 存在 $(k+1)$ 位正整數 A_{k+1} 為 2^{k+1} 的倍數, 其中 A_{k+1} 的每一位數字都是 1 或 2。

故得證

□

11. 試證：沒有任何整數 x, y 能滿足 $x^2 + 3xy - 2y^2 = 122$

證明 (1) 將題目改為以 x 為變數的一元二次方程式,

$$x^2 + (3y) \cdot x + (-2y^2 - 122) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{判別式 } D &= (3y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2y^2 - 122) \\
 &= 9y^2 + 8y^2 + 488 \\
 &= 17y^2 + 488
 \end{aligned}$$

(2) 我們接下來將證明 $17y^2 + 488$ 並不是一個完全平方數

$\because 488$ 除以 17 餘 12 又 $\because y \in Z$

$\therefore (17y^2 + 488)$ 除以 17 的餘數是 12

(3) 把所有的整數除以 17 ,

其餘數可能是 $0, 1, 2, 3, 4, \dots, 15, 16$ 等 17 種,

故將所有的整數分成 17 類,

即 $17k, 17k + 1, \dots, 17k + 15, 17k + 16, \quad k \in Z,$

當 $n = 17k$ 時, n^2 除以 17 的餘數是 0 ,

$n = 17k + 1, 17k + 16$ 時, n^2 除以 17 的餘數是 1 ,

$n = 17k + 2, 17k + 15$ 時, n^2 除以 17 的餘數是 4 ,

$n = 17k + 3, 17k + 14$ 時, n^2 除以 17 的餘數是 9 ,

$n = 17k + 4, 17k + 13$ 時, n^2 除以 17 的餘數是 16 ,
 $\left(\begin{aligned} \because n = 17k + 4, n^2 &= (17k + 4)^2 = 289k^2 + 136k + 16 \\ &= 17(17k^2 + 8k) + 16 \therefore \text{餘數是 } 16 \end{aligned} \right)$
 $n = 17k + 5, 17k + 12$ 時, n^2 除以 17 的餘數是 8 ,

$n = 17k + 6, 17k + 11$ 時, n^2 除以 17 的餘數是 2 ,

$n = 17k + 7, 17k + 10$ 時, n^2 除以 17 的餘數是 15 ,

$n = 17k + 8, 17k + 9$ 時, n^2 除以 17 的餘數是 13 。

(4) 從 3 的運算可知這 17 類的自然數, 沒有任何一類自然數, 其平方

除以 17 的餘數是 12 ,

$\therefore x^2 + (3x) \cdot x + (-2y^2 - 122) = 0$ 的判別式 $D = 17y^2 + 488$ 不可能是某自然數的平方,
 $\therefore x$ 的解沒有有理數, 更沒有整數,
 \therefore 沒有任何整數 x, y 能滿足 $x^2 + 3xy - 2y^2 = 122$ \square

12. 設 a, b, c 皆為整數, 且 $a^2 + b^2 = c^2$, 試證: $60|abc$

證明 (1) 設 a, b, c 三數皆非 3 的倍數,

則 a, b, c 三數除以 3 的餘數可能是 1 或 2,

設 $a, b, c = 3k + 1$ 或 $3k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$)

則 a^2, b^2, c^2 除以 3 的餘數皆為 1,

$(a^2 + b^2)$ 除以 3 的餘數為 2, 不等於 c^2 除以 3 的餘數,

矛盾, $\therefore a, b, c$ 至少有一數是 3 的倍數 $\therefore 3|abc$

(2) 設 a, b, c 三數皆非 5 的倍數,

則 a, b, c 三數除以 5 的餘數可能是 1, 2, 3, 4,

設 $a, b, c = 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3$ 或 $5k + 4$, ($k \in \mathbb{Z}$)

則 a^2, b^2, c^2 除以 5 的餘數可能是 1, 4,

$(a^2 + b^2)$ 除以 5 的餘數可以是 2, 0, 3

因爲	a^2 除以 5 的餘數	b^2 除以 5 的餘數	$(a^2 + b^2)$ 除以 5 的餘數
	1	1	2
	1	4	0
	4	1	0
	4	4	3

但 c^2 除以 5 的餘數可以是 1, 4, 矛盾, $\therefore a, b, c$ 三數至少有一數

是 5 的倍數, $\therefore 5|abc$

(3) 設 a, b, c 三數皆非 4 的倍數.

則 a, b, c 三數除以 8 的餘數可能是 1, 2, 3, 5, 6, 7,

設 $a, b, c = 8k + 1, 8k + 2, 8k + 3, 8k + 5, 8k + 6$ 或 $8k + 7, \quad k \in Z$

則 a^2, b^2, c^2 除以 5 的餘數可能是 1, 4,

a^2 除以 8 餘數	b^2 除以 8 餘數	$(a^2 + b^2)$ 除以 8 餘數
1	1	2
1	4	5
4	1	5
4	4	0

$(a^2 + b^2)$ 除以 8 的餘數可能是 2, 5, 0,

但 c^2 除以 8 的餘數可能是 1, 4, 矛盾,

$\therefore a, b, c$ 至少有一數是 $8k$ 或 $8k + 4 \quad (k \in Z)$

$\therefore a, b, c$ 三數至少有一數是 4 的倍數, $\therefore 4|abc$

(4) $\because 3|abc, 4|abc, 5|abc \therefore 60|abc \quad \square$

13. 設 p 是正整數, $p > 5$, 且 $p, p + 2, p + 6, p + 8$ 皆為質數,

試證: $p + 4$ 是 15 的倍數。

證明 (1) 因為 $p + 2, p + 6$ 皆為質數, 不是 3 的倍數,

$\therefore p + 5 = (p + 2) + 3$ 亦皆非 3 的倍數,

$\therefore p + 4$ 為 3 的倍數 (\because 連續三整數必有一個為 3 的倍數)

(2) 因為 $p, p + 2, p + 6, p + 8$ 皆為質數, 皆非 5 的倍數,

$\therefore p + 1 = (p + 6) - 5, p + 3 = (p + 8) - 5$ 亦皆非 5 的倍數,

$\therefore p + 4$ 為 5 的倍數 (\because 連續五個整數中必有一個為 5 的倍數)

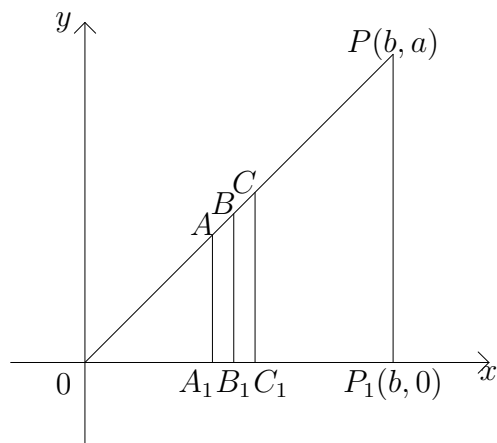
(3) $\therefore p + 4$ 為 15 的倍數。 \square

14. 若 a, b 為互質的正整數, 且 $b \geq 2$,

試證： $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{2a}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{(b-1)a}{b}\right] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$

解 設一直線 $L: y = \frac{a}{b}x$

- (1) 設 $A(1, \frac{a}{b})$ 在 L 上, 自 A 向 x 軸作垂線, 垂足是 A_1 , 則在 $\overline{AA_1}$ 上的所有點 (A_1 除外), 其中 y 坐標為正整數的點, 共有 $\left[\frac{a}{b}\right]$ 個。



- (2) 設 $B(2, \frac{2a}{b})$ 在 L 上, 自 B 向 x 軸作垂線, 垂足是 B_1 , 則在 $\overline{BB_1}$ 上的所有點 (B_1 除外), 其中 y 坐標為正整數的點共有 $\left[\frac{2a}{b}\right]$ 個。

- (3) 設 $C(3, \frac{3a}{b})$ 在 L 上, 自 C 向 x 軸作垂線, 垂足是 C_1 , 則在 $\overline{CC_1}$ 上的所有點 (C_1 除外), 其中 y 坐標為正整數的點共有 $\left[\frac{3a}{b}\right]$ 個。

.....

- (4) 設 $P(a, b)$ 在 L 上, 自 P 向 x 軸作垂線, 垂足是 P_1 , 則在 $\overline{PP_1}$ 上的所有點 (P_1 除外), 其中 y 坐標為正整數的點共有 $[a]$ 個。

(5) \therefore 設 $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{2a}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{(b-1)a}{b}\right] = m$

則 m 表示在 $\triangle OPP_1$ 内部的格子點的數目的總和,

而 $\because P(b, a), P(b, 0) \therefore \triangle OPP_1$ 内部的格子點 $m = \frac{(b-1)(a-1)}{2}$

$$\therefore \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{2a}{b}\right] + \left[\frac{3a}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{(b-1)a}{b}\right] = \frac{(b-1)(a-1)}{2}$$

□

15. 試證：100010001, 1000100010001, 10001000100010001, ..., 這些類型的整數皆非質數。

解 設 $f_n(x) = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots + x^{4n}$

$$f_n(10) = 1 + 10^4 + 10^8 + 10^{12} + \cdots + 10^{4n}$$

則 $f_2(10) = 100010001$

$$f_3(10) = 1000100010001$$

$$f_4(10) = 10001000100010001$$

我們把 n 分奇數，偶數來討論

(1) $n \geq 3$ 是奇數時，設 $n = 2m + 1, m \in N$

$$f_n(x) = 1 + x^4 + x^8 + \cdots + x^{4(2m+1)}$$

$$= (1 + x^4) + x^8(1 + x^4) + x^{16}(1 + x^4) + \cdots + x^{8m}(1 + x^4)$$

$$= (1 + x^4)(1 + x^8 + x^{16} + \cdots + x^{8m})$$

$$f_n(10) = (10001)(1 + 10^8 + 10^{16} + \cdots + 10^{8m})$$

$\therefore f_n(10)$ 不是質數。

(2) n 是偶數時，設 $n = 2m, m \in N$

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= 1 + x^4 + x^8 + \cdots + x^{4 \cdot (2m)} \\
&= \frac{1 - (x^4)^{2m+1}}{1 - x^4} \\
&= \frac{1 - (x^{2m+1})^4}{(1 - x^2)(1 + x^2)} \\
&= \frac{[-(x^{2m+1})^2][1 + (x^{2m+1})^2]}{(1 - x^2)(1 + x^2)} \\
&= \frac{1 - (x^{2m+1})^2}{1 - x^2} \cdot \frac{1 + (x^{2m+1})^2}{1 + x^2} \\
&= (1 + x^2 + x^4 + \cdots + (x^2)^{2m})(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (x^2)^{2m}) \\
\therefore f_n(10) &= (1 + 10^2 + 10^4 + \cdots + 10^{4m})(1 - 10^2 + 10^4 - 10^6 + \cdots + 10^{4m}) \\
\therefore f_n(10) &\text{ 不是質數。由 (1), (2) 可知 } f_n(10) \text{ 不是質數, } (n \geq 2), \\
\therefore &100010001, 1000100010001, 10001000100010001, \dots, \\
&\text{這些類型的整數皆非質數。}
\end{aligned}$$

□

16. 使 26 整除 $5^{1951} + a$ 的整數 a 之值為何？

解 由 $5^{1950} + 1 = (5^2 + 1)(5^{1948} - 5^{1946} + 5^{1944} - \cdots + 5^4 - 5^2 + 1)$, $5^2 + 1 = 26$

使 $26 \mid 5^{1950} + 1$

$\therefore 5^{1951} + a = (5^{1950} + 1) \cdot 5 + (a - 5)$, 當 $26 \mid a + 5^{1951}$ 時 $26 \mid a - 5$,

即 $a = 5 + 26t$, a 用 26 除餘 5

$\left[\begin{array}{l} \text{註：以 26 爲模時, } 5^{1951} + a \equiv (5^2)^{975} \cdot 5 + a \equiv (-1)^{975} \cdot 5 + a \pmod{26} \\ a - 5 \equiv 0 \pmod{26}, \text{ 即 } a = 5 + 26t \end{array} \right]$

□

17. 17^{462} 之個位、十位數為何？

解 (1) 即討論除以 100 之餘數, 先說明 $4|17^{20}-1, 25|17^{20}-1$:

$$17^{20}-1=(4\cdot 4+1)^{20}-1=(4a+1^{20})-1, \text{ 故 } 4|17^{20}-1$$

$$17^4-1=(17^2)^2-1=(5\cdot 58-1)^2-1, \text{ 故 } 5|17^4-1, \text{ 令 } 17^4=5b+1,$$

$$\text{得 } 17^{20}-1=(17^4)^5-1=(5b+1)^5-1=(5b)^5+C_1^5(5b)^4+\cdots+$$

$$C_4^5(5b)$$

$$\therefore 25|17^{20}-1 \quad (\because C_i^5 \text{ 是 } 5 \text{ 的倍數, 其中 } i=1, 2, 3, 4)$$

(2) 由 $4|17^{20}-1$ 與 $25|17^{20}-1$ 得 $100|17^{20}-1$, 令 $17^{20}=100c+1$

$$17^{462}=(17^{20})^{23}\cdot 17^2=(100c+1)^{23}\cdot 289=(100d+1^{23})\cdot 289$$

故 17^{462} 之個位是 9, 十位是 8

$$\left[\begin{array}{l} \text{註: } \phi(100)=40, \lambda(100)=20 \\ (100=2^2\cdot 5^2, \phi(200)=100(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5}), \lambda(100)=[2^2-2, 5^2-5]) \\ \text{由 Euler 定理知: } 100|17^{20}-1, 100|17^{40}-1 \\ 17^{462}=(17^{40})^{11}\cdot 17^{20}\cdot 17^2=1^{11}\cdot 1\cdot 289\equiv 89 \pmod{100} \\ \text{得個位數字 9, 十位數字 8} \end{array} \right]$$

□

18. 試證: $2^{32}+1$ 有一個因數是 641

$$(\text{已知 } 641=5^4+2^4, 641=10\cdot 2^6+1=5\cdot 2^7+1)$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad 641 &= 2^6\cdot 10+1, 641=5^4+2^4 \\ 2^{32}+1 &= 2^{28}\cdot 2^4+1 \end{aligned}$$

$$= 2^{28}[641-5^4]+1$$

$$= 641\cdot 2^{28}-(2^7\cdot 5)^4+1$$

$$= 641\cdot 2^{28}-(641-1)^4+1$$

$$= 641[2^{28}-641^3+6\cdot 641^2-6\cdot 641+4]$$

$$\text{故 } 641|2^{32}+1$$

$$[\text{其中 } (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4]$$

□

19. 試求 $y^2 - 3xy + x - y = 0$ 的整數解？

解 原式化爲 $x = \frac{y^2 - y}{3y - 1}$, x 爲整數

$$\text{得 } \frac{3y^2 - 3y}{3y - 1} = y + \frac{-2y}{3y - 1}, \frac{-6y}{3y - 1} = -2 + \frac{-2}{3y - 1}$$

因而 $3y - 1 \mid 2, y = 0$ 或 1

故其解爲 $(0, 0), (0, 1)$

□

20. 求 $a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b - 2c$ 的整數解？

解 $a^2 + b^2 + c^2 + 3 - ab - 3b + 2c$

$$= a^2 - ba + (b^2 - 3b + 3) + (c^2 + 2c)$$

$$= (a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}(b - 2)^2 + (c + 1)^2 - 1$$

$$= (a - \frac{b}{2})^2 + 3(\frac{b}{2} - 1)^2 + (c + 1)^2 - 1$$

得 $(a - \frac{b}{2})^2 + 3(\frac{b}{2} - 1)^2 + (c + 1)^2 < 1$, Z 表整數全體時,

因 $a, b, c \in Z$, 故 $c = -1$, 又 $(\frac{b}{2} - 1)^2 < \frac{1}{3}, b = 1, 2, 3$

而 $b = 1$ 時 $(a - \frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4}$, 對 $a \in Z$ 不可能；

$b = 2$ 時 $(a - 1)^2 < 1$, 得 $a = 1$

$b = 3$ 時 $(a - \frac{3}{2})^2 < \frac{1}{4}$, 對 $a \in Z$ 不可能

$\therefore a = 1, b = 2, c = -1$

□

21. (1) 求 $|x| + |y| < 100$ 之所有整數解組數？

(2) 求 $|x| + |y| + |z| < 100$ 之所有整數解組數？

- 解** (1) 先就 $x, y \in N, x + y < 100$ 共有 $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 = C_2^{99}$ 組解
 $\therefore |x| + |y| < 100$ 共有 $4(1 + 2 + \cdots + 98) + 199 \cdot 2 - 1 = 19801$ 組解
- (2) 自然數 x, y, z 且 $x + y + z < 100$ 共有 C_3^{99} 組解
 $\left(\begin{array}{l} \because 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \cdots + (1 + 2 + 3 + \cdots + 97) \\ = \frac{1}{6} \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 = C_3^{99} \end{array} \right)$
 $\therefore |x| + |y| + |z| < 100$ 共有 $8C_3^{99} + 12C_2^{99} + 6C_1^{99} + C_0^{99} = 1313599$
 組解

□

22. 是否可將連續 8 個整數均分成 2 組, 使 1 組 4 個數的平方和等於另一組 4 個數的平方和?

- 解** 先簡驗 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 是否可能均分成 2 組且合乎題意:
 由 $2^2 - 1^2 = 3, 3^2 - 2^2 = 5, 4^2 - 3^2 = 7, 5^2 - 4^2 = 9, 6^2 - 5^2 = 11,$
 $7^2 - 6^2 = 13, 8^2 - 7^2 = 15, \cdots$
 3, 7, 11, 15 中, 因 $3 + 15 = 7 + 11$, 得 $(2^2 - 1^2) + (8^2 - 7^2) = (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2)$
 $\therefore 1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$, 其中 $1 + 4 + 6 + 7 = 2 + 3 + 5 + 8$
 在一般情形下, 由 $2^2 + 5^2 + 7^2 + 8^2 = 3^2 + 4^2 + 6^2 + 9^2$,
 $3^2 + 6^2 + 8^2 + 9^2 = 4^2 + 5^2 + 7^2 + 10^2, \cdots$
 $(a + 1)^2 + (a + 4)^2 + (a + 6)^2 + (a + 7)^2$
 $= 4a^2 + 2(1 + 4 + 6 + 7)a + (1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2)$
 $= 4a^2 + 2(2 + 3 + 5 + 8)a + (2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2)$
 $= (a + 2)^2 + (a + 3)^2 + (a + 5)^2 + (a + 8)^2$
 得 $(a + 1)^2 + (a + 4)^2 + (a + 6)^2 + (a + 7)^2$

$$= (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+5)^2 + (a+8)^2 \text{ 恆成立,}$$

故, 任意連續 8 個整數可分成 2 組, 1 組 4 個的平方和等於另一個其餘 4 個的平方和,

$$\text{如 } 61^2 + 64^2 + 66^2 + 67^2 = 62^2 + 63^2 + 65^2 + 68^2 \quad \square$$

23. 用 $1997 \cdot 1998 + 1$ 去除 $1997^{10} + 1997^5$ 的餘數, 商數為何?

解 令 $a = 1997 \cdot 1998 + 1, a = 1997^2 + 1997 + 1 \mid 1997^3 - 1,$

又 $1997^3 - 1 \mid 1997^9 - 1$, 故 $a \mid 1997^9 - 1$

$$1997^{10} + 1997^5 = (1997^9 - 1) \cdot 1997 + (1997^3 - 1) \cdot 1997^2 + [1997^2 + 1997]$$

$$= aq + r$$

其中 $r = 1997^2 + 1997 \cdots \cdots$ 餘數

$$q = (1997 - 1)[1997^6 + 1997^3 + 1] \cdot 1997 + (1997 - 1) \cdot 1997^2$$

$$= 1997^8 - 1997^7 + 1997^5 - 1997^4 + 1997^3 - 1997 \cdots \cdots \text{商數} \quad \square$$

24. 由小到大的連續 $2n + 1$ 個自然數滿足：前 $n + 1$ 個數的平方和等於後 n 個自然數的平方和, 請問是哪些自然數? (例如 $3^2 + 4^2 = 5^2$)

解 (1) 由 $3^2 + 4^2 = 5^2$ 聯想成連續三數 $a, a + 1, a + 2$ 有 $a^2 + (a + 1)^2 = (a + 2)^2$ 的關係時,

$$\text{得 } a^2 - 2a - 3 = 0, a = 3 \text{ 或 } a = -1 \text{ (不討論 } a < 0),$$

$$\text{只有 } 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$(2) \text{ 由 } a^2 + (a + 1)^2 + (a + 2)^2 = (a + 3)^2 + (a + 4)^2$$

$$\text{得 } a^2 - 8a - 20 = 0, (a - 10)(a + 2) = 0$$

$$\text{只有 } a = 10, 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$(3) \text{ 由 } a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 = (a+4)^2 + (a+5)^2 + (a+6)^2,$$

$$\text{得 } a^2 - 18a - 63 = 0$$

$$(a-21)(a+3) = 0, \text{ 只有 } a = 21, 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

$$(4) \text{ 同理可得 } 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2,$$

$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$$

一般而言, 設 $2n+1$ 個數 $a, a+1, a+2, \dots, a+2n$ 滿足:

$$a^2 + (a+1)^2 + \dots + (a+n)^2 = (a+n+1)^2 + (a+n+2)^2 + \dots + (a+2n)^2,$$

$$\text{得: } 0 = a^2 + 2[(1+2+\dots+n) - (n+1) - (n+2) - (n+3) - \dots - 2n]a$$

$$+ [(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - (n+1)^2 - (n+2)^2 - \dots - (2n)^2]$$

$$\therefore a^2 - 2n^2a - [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n)^2] + 2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = 0$$

$$\text{化簡成 } a^2 - 2n^2a - n^2(2n+1) = 0, (a+n)[a - (2n^2+n)] = 0$$

$$\text{因而 } a = 2n^2 + n, \text{ 此時 } n=1, a=3; n=2, a=10; n=3, a=21; \dots$$

$$\text{即 } \sum_{k=0}^n (2n^2 + n + k)^2 = \sum_{k=1}^n (2n^2 + 2n + k)^2$$

$$\text{例如 } n=6 \text{ 時, } 78^2 + 79^2 + 80^2 + 81^2 + 82^2 + 83^2 + 84^2 = 85^2 + 86^2 + 87^2 + 88^2 + 89^2 + 90^2$$

$$[\text{註: } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + m^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)]$$

□

25. 連續三個數的平方和可能等於另一個數的平方和嗎?

解 觀察 $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14, 2^2 + 3^2 + 4^2 = 29, 3^2 + 4^2 + 5^2 = 50, \dots$

14, 29, 50, ... 都不是平方數

在一般情形下, 三連續數之平方和 $a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 = 3a^2 + 6a + 5$,

而 $3a^2 + 6a + 5 = 3(a^2 + 2a + 1) + 2$, 使 $3a^2 + 6a + 5$ 用 3 除餘 2,

但平方數不可能有用 3 除餘 2 的情形

(因任一數 b , 可就 $b = 3k, b = 3k + 1, b = 3k + 2$ 討論,

得 $b^2 = 3(3k^2), 3(k^2 + 2k) + 1, 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$,

使 b^2 除以 3 之餘數為 0 或 1, $\therefore b^2$ 不可能用 3 除餘 2)

因此 $3a^2 + 6a + 5$ 一定不是平方數, 亦即:

連續三個數的平方和一定不是平方數。 □

26. 說明: 滿足 $(a, b, c) = 1$ (三數互質) 且 $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ 的正整數解有無限多組解。

解 任取正奇數 m , 正偶數 n 且 $(m, n) = 1, m > n$

令 $a = 2mn, b = m^2 - n^2, c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 1), d = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 1)$

由 $(m, n) = 1$, 易知 $(a, b) = 1$ 及 $(a, b, c) = 1$

$a^2 + b^2 = (m^2 + n^2)^2$ 為大於 1 的奇數使 c, d 均為自然數

又 $d^2 - c^2 = (d + c)(d - c) = (a^2 + b^2) \cdot 1$

得 $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, 其中 $(a, b, c) = 1$

(例如 $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2, 8^2 + 9^2 + 12^2 = 17^2, 2^2 + 10^2 + 25^2 = 27^2,$
 $2^2 + 14^2 + 49^2 = 51^2, 16^2 + 1^2 + 128^2 = 129^2, \dots$)

因 a 為偶數, b 為奇數使 $a^2 + b^2$ 用 4 除餘 1, c 為偶數

而 b 有無限個 (可使 n 固定, m 變大)

故滿足 $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ 且 $(a, b, c) = 1$ 之正整數解有無限多組

$$\left[\begin{array}{l} \text{註：若知用4除餘1的正質數} p \text{必爲二整數的平方和} \\ 7^2 \cdot 53 = 7^2(7^2 + 2^2) \text{ 且 } 7^2 \cdot 53 = 53 \cdot 49 = (51 + 2)(51 - 2) = 51^2 - 2^2 \\ \therefore 7^2(7^2 + 2^2) = 51^2 - 2^2, \text{ 得 } 49^2 + 14^2 + 2^2 = 51^2 \\ \text{又 } 5^2 \cdot 29 = 5^2(5^2 + 2^2) \text{ 且 } 5^2 \cdot 29 = 29 \cdot 25 = (27 + 2)(27 - 2) = 27^2 - 2^2 \\ \therefore 5^2 \cdot (5^2 + 2^2) = 27^2 - 2^2, \text{ 得 } 25^2 + 10^2 + 2^2 = 27^2 \end{array} \right]$$

□

27. 由

$$3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1, 17^2 - 2 \cdot 12^2 = 1, 577^2 - 2 \cdot 408^2 = 1, 665857^2 - 2 \cdot 470832^2 = 1$$

各式的關係,

如何獲知方程式 $a^2 - 2 \cdot b^2 = 1$ 有無限多組數解?解 $12 = 2 \cdot 3 \cdot 2, 408 = 2 \cdot 17 \cdot 12$

$$1 + 2 \cdot 12^2 = 1 + 2(2 \cdot 3 \cdot 2)^2 = (3^2 - 2 \cdot 2^2)^2 + 8 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = (3^2 + 2 \cdot 2^2)2 = 17^2$$

$$1 + 2 \cdot 408^2 = 1 + 2(2 \cdot 17 \cdot 12)^2 = (17 \cdot 2 - 2 \cdot 12^2)2 + 8 \cdot 17^2 \cdot 12^2 = (17^2 + 2 \cdot 12^2)2 = 577^2$$

同理 $470832 = 2 \cdot 577 \cdot 408, 665857 = 577^2 + 2 \cdot 408^2$ 使 $(665857, 470832)$ 是 $a^2 - 2b^2 = 1$ 的一組解, 即 $665857^2 - 2 \cdot 470832^2 = 1$ 成立一般而言, $x^2 - 2y^2 = 1$ 之一組解 (a_1, b_1) 令 $b = 2a_1b_1, a = a_1^2 + 2b_1^2$

$$\text{此時 } a_1^2 - 2b_1^2 = 1, a^2 - 2b^2 = (a_1^2 + 2b_1^2)^2 - 2(2a_1b_1)^2,$$

 $\therefore a^2 - 2b^2 = (a_1^2 - 2b_1^2)^2$, 因而 $a^2 - 2b^2 = 1$ 得 (a, b) 爲 $x^2 - 2y^2 = 1$ 的一組解
註: $i = \sqrt{-1}$, 複數 z 滿足 $|z|^2 = |z^2|$ 1. $z = a + bi$, a 與 b 爲實數時

$$|z|^2 = a^2 + b^2, z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi, |z|^2 = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}$$

$$\therefore (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$$

2. $z = a + b\sqrt{2}i$, a 與 b 為實數時,

$$|z|^2 = a^2 + 2b^2, z^2 = (a^2 - 2b^2) + (2\sqrt{2}ab)i, |z^2| = \sqrt{(a^2 - 2b^2)^2 + 2(2ab)^2}$$

$$\therefore (a^2 + 2b^2)^2 = (a^2 - 2b^2)^2 + 2(2ab)^2$$

故當 $a^2 - 2b^2 = 1$ 時 $(a^2 + 2b^2)^2 - 2(2ab)^2 = 1$, 使 $(a^2 + 2b^2, 2ab)$

為 $x^2 - 2y^2 = 1$ 的一組解

□

28. 將 $4^2 + 5^2 + 6^2 = 2^2 + 3^2 + 8^2$ 搭配左方和右方的數字, 例如 42, 53, 68
可驗得 $42^2 + 53^2 + 68^2 = 24^2 + 35^2 + 86^2$, 為什麼呢?

解

$$\begin{aligned} 42^2 + 53^2 + 68^2 &= (40 + 2)^2 + (50 + 3)^2 + (60 + 8)^2 \\ &= (40^2 + 50^2 + 60^2) + (2^2 + 3^2 + 8^2) + 2[40 \cdot 2 + 50 \cdot 3 + 60 \cdot 8] \\ &= 100(4^2 + 5^2 + 6^2) + (2^2 + 3^2 + 8^2) + 20[4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 8] \\ &= 100(2^2 + 3^2 + 8^2) + (4^2 + 5^2 + 6^2) + 20[2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 8 \cdot 6] \\ &= (20^2 + 30^2 + 80^2) + (4^2 + 5^2 + 6^2) + 2[20 \cdot 4 + 30 \cdot 5 + 80 \cdot 6] \\ &= (20 + 4)^2 + (30 + 5)^2 + (80 + 6)^2 = 24^2 + 35^2 + 86^2 \\ \therefore 42^2 + 53^2 + 68^2 &= 24^2 + 35^2 + 86^2 \end{aligned}$$

□

29. 觀察 $3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 1, 3 \cdot 9^2 - 2 \cdot 11^2 = 1, 3 \cdot 89^2 - 2 \cdot 109^2 = 1, 3 \cdot 881^2 - 2 \cdot 1079^2 = 1$ 諸式, 是否可得 $3a^2 - 2b^2 = 1$ 有無限多組解?

解

1. 由 $89 = 10 \cdot 9 - 1, 881 = 10 \cdot 89 - 9$, 取 $a = 10 \cdot 881 - 89 = 8721$
由 $109 = 10 \cdot 11 - 1, 1079 = 10 \cdot 109 - 11$, 取 $b = 10 \cdot 1079 - 109 =$

10681

$$\begin{aligned} \text{得 } 3a^2 - 2b^2 &= 3[10 \cdot 881 - 89]^2 - 2[10 \cdot 1079 - 109]^2 \\ &= 10^2[3 \cdot 881^2 - 2 \cdot 1079^2] + [3 \cdot 89^2 - 2 \cdot 109^2] \\ &\quad - 20[3 \cdot 881 \cdot 89 - 2 \cdot 1079 \cdot 109] \end{aligned}$$

$$\text{其中 } 3 \cdot 881^2 - 2 \cdot 1079^2 = 1, 3 \cdot 89^2 - 2 \cdot 109^2 = 1$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 881 \cdot 89 - 2 \cdot 1079 \cdot 109 &= 3[10 \cdot 89 - 9] \cdot 89 - 2[10 \cdot 109 - 11] \cdot 109 \\ &= 10[3 \cdot 89^2 - 2 \cdot 109^2] - [3 \cdot 89 \cdot 9 - 2 \cdot 109 \cdot 11] \\ &= 10 - [3 \cdot (10 \cdot 9 - 1) \cdot 9 - 2 \cdot (10 \cdot 11 - 1) \cdot 11] \\ &= 10 - 10[3 \cdot 9^2 - 2 \cdot 11^2] + [3 \cdot 9 - 2 \cdot 11] \\ &= 10 - 10 + 5 = 5 \end{aligned}$$

$\therefore 2a^2 - 2b^2 = 10^2 \cdot 1 + 1 - 20 \cdot 5 = 1$, 即 $(8721, 10681)$ 為 $3a^2 - 2b^2 = 1$ 的一組整數解

2. 仿上, 由 $3 \cdot 881^2 - 2 \cdot 1079^2 = 1$ 及 $3 \cdot 8721^2 - 2 \cdot 10681^2 = 1$,

可取 $a = 10 \cdot 8721 - 881 = 86329, b = 10 \cdot 10681 - 1079 = 105731$,

使 $(86329, 105731)$ 為 $3a^2 - 2b^2 = 1$ 的一組整數解, 再驗證如下:

$$\begin{aligned} 3a^2 - 2b^2 &= 3[10 \cdot 8721 - 881]^2 - 2[10 \cdot 10681 - 1079]^2 \\ &= 100[3 \cdot 8721^2 - 2 \cdot 10681^2] + [3 \cdot 881^2 - 2 \cdot 1079^2] \\ &\quad - 20[3 \cdot 8721 \cdot 881 - 2 \cdot 10681 \cdot 1079] \end{aligned}$$

$$\text{其中 } 3 \cdot 8721^2 - 2 \cdot 10681^2 = 1, 3 \cdot 881^2 - 2 \cdot 1079^2 = 1$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 8721 \cdot 881 - 2 \cdot 10681 \cdot 1079 &= 3[10 \cdot 881 - 89] \cdot 881 - 2[10 \cdot 1079 - 109] \cdot 1079 \\ &= 10[3 \cdot 881^2 - 2 \cdot 1079^2] - [3 \cdot 881 \cdot 89 - 2 \cdot 1079 \cdot 109] \end{aligned}$$

$$= 10 \cdot 1 - 5 = 5, \text{ 其中 } 3 \cdot 881 \cdot 89 - 2 \cdot 1079 \cdot 109 = 5$$

3. 一般情形, 由歸納法證明: 已知 $3a_2a_1 - 2b_2b_1 = 5, 1 = 3a_1^2 - 2b_1^2 = 3a_2^2 - 2b_2^2$ 且

$$a_n = 10a_{n-1} - a_{n-2} \text{ 與 } b_n = 10b_{n-1} - b_{n-2} \text{ 時}$$

設 $1 = 3a_n^2 - 2b_n^2 = 3a_{n-1}^2 - 2b_{n-1}^2$ 成立及 $2a_na_{n-1} - 2b_nb_{n-1} = 5$ 成立

$$\begin{aligned} (1) \quad 3a_{n+1}a_n - 2b_{n+1}b_n &= 3(10a_n - a_{n-1})a_n - 2(10b_n - b_{n-1})b_n \\ &= 10[3a_n^2 - 2b_n^2] - [2a_na_{n-1} - 2b_nb_{n-1}] = 10 \cdot 1 - 5 = 5 \end{aligned}$$

使 $3a_{n+1}a_n - 2b_{n+1}b_n = 5$ 亦成立

$$\begin{aligned} (2) \quad 3a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 &= 3[10a_n - a_{n-1}]^2 - 2[10b_n - b_{n-1}]^2 \\ &= 100[3a_n^2 - 2b_n^2] + [3a_{n-1}^2 - 2b_{n-1}^2] - 20[3a_na_{n-1} - 2b_nb_{n-1}] \\ &= 100 \cdot 1 + 1 - 20 \cdot 5 = 1 \end{aligned}$$

使 $3a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = 1$ 亦成立

故知 $3a_1^2 - 2b_1^2 = 3a_2^2 - 2b_2^2 = 3a_3^2 - 2b_3^2 = \cdots = 3a_n^2 - 2b_n^2 = 1$ 恆成立, 其中 $\langle a_n \rangle = \langle 1, 9, 89, \dots \rangle$ 及 $\langle b_n \rangle = \langle 1, 11, 109, \dots \rangle$ 且 $3a_na_{n-1} - 2b_nb_{n-1} = 5$

□

30. 三個連續自然數的立方和會是立方數嗎?

解 由 $1^3 = 1, 2^3 = 3+5, \dots, n^3 = (n^2-n+1)+(n^2-n+3)+\cdots+(n^2+n-1)$

$$\begin{cases} 3^3 = 7 + 9 + 11 \\ 4^3 = 13 + 15 + 17 + 19 \\ 5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29 \\ 6^3 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 \end{cases}$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = (7 + 9 + 11) + (13 + 15 + 17 + 19) + (21 + 23 + 25 + 27 + 29)$$

$$= \frac{12}{2}[7 + 29] = \frac{12}{2} \cdot 36$$

$$\text{而 } 6^3 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = \frac{6}{2}[31 + 41] = \frac{6}{2} \cdot 72, \text{ 知 } 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

一般而言：若自然數 n 與 m 滿足 $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = m^3$ 時，
 $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = (n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + (n^2 - n + 5) + \dots$

$$\begin{aligned} &+ (n^2 + 5n + 5) \\ &= \frac{3n+3}{2}[(n^2 - n + 1) + (n^2 + 5n + 5)] \\ &= \frac{3n+3}{2}[2n^2 + 4n + 6] \end{aligned}$$

$$\text{而 } m^3 = (m^2 - m + 1) + (m^2 - m + 3) + \dots + (m^2 + m - 1) =$$

$$\frac{m}{2}[(m^2 - m + 1) + (m^2 + m - 1)] = \frac{m}{2}[2m^2]$$

$$\text{當 } \begin{cases} 3n+3=2m \\ 2n^2+4n+6=m^2 \end{cases} \text{ 時 } (3n+3)^2 = 8n^2+16n+24, n^2+2n-15=0,$$

$$\text{得 } n=3, \text{ 即 } 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

$$\text{又 } n^3 + (n+1)^3 + (n-1)^3 = m^3 \Leftrightarrow 3n(n^2 + 2) = m^3, \text{ 今証 } m = \frac{3}{2}n,$$

$$\text{得 } n=4, \text{ 即 } 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

(1) $m > \frac{3}{2}n$ 時

$$m^3 - 3n(n^2 + 2) > (\frac{3}{2}n)^3 - 3n^3 - 6n = \frac{3}{8}n(n+4)(n-4), \text{ 對於}$$

$$n \geq 4 \text{ 恆有 } m^3 - 3n(n^2 + 2) > 0,$$

$$\text{即 } (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \neq m^3$$

(2) $m < \frac{3}{2}n$ 時

$$m^3 - 3n(n^2 + 2) < (\frac{3}{2}n)^3 - 3n^3 - 6n = \frac{3}{8}n(n+4)(n-4), \text{ 對於}$$

$$n \geq 4 \text{ 恆有 } m^3 - 3n(n^2 + 2) < 0,$$

$$\text{即 } (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \neq m^3$$

$$(3) \ m = \frac{3}{2}n \text{ 時}$$

$$m^3 = 3n(n^2 + 2) \Leftrightarrow (\frac{3}{2}n)^3 = 3n(n^2 + 2) \Leftrightarrow n(n+4)(n-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$n = 4$$

由 (1), (2), (3) 得知：

三個連續自然數的立方和為立方數的情況只有一種，即 $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$

□

$$31. \text{ 觀察： } 1^3 + 6^3 = 9^3 - 8^3, 2^3 + 17^3 = 41^3 - 40^3, 3^3 + 34^3 = 115^3 - 114^3, 4^3 + 57^3 = 249^3 - 248^3$$

試證：型如 $b^3 + c^3 = a^3 - (a-1)^3$ 且 b, c 互質的數對 (a, b, c) 有無限多組？

解 由 $(b+c)(b^2-bc+c^2) = 3a(a-1)+1$, $b+c$ 是 $3a(a-1)+1$ 的因數，
使 $b+c$ 用 3 除餘 1 ($\because b^3+c^3 = (b+c)[(b+c)^2-3bc]$, $b+c$ 不可能
用 3 除餘 2 或 0)

$$\text{而 } b+c = 1+6 = 7 = 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1$$

$$b+c = 2+17 = 19 = 3 \cdot 3 \cdot 2 + 1$$

$$b+c = 3+34 = 37 = 3 \cdot 4 \cdot 3 + 1$$

$$\dots \dots \dots \Rightarrow \frac{b+c-1}{3} = (b+1)b$$

$$\text{猜測 } b = n, b+c = 3 \cdot (n+1) \cdot n + 1, c = 3n^2 + 2n + 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{因而 } 3a \cdot (a-1) &= b^3 + c^3 - 1 = n^3 + (3n^2 + 2n + 1)^3 - 1 \\
 &= 3[9n^6 + 18n^5 + 21n^4 + 15n^3 + 7n^2 + 2n] \\
 &= 3(3n^3 + 3n^2 + 2n + 1)(3n^3 + 3n^2 + 2n)
 \end{aligned}$$

得 $a = 3n^3 + 3n^2 + 2n + 1$, 即滿足 b, c 互質之 (a, b, c) 有無限多組, 其

中 $b^3 + c^3 + (a-1)^3 = a^3$

列表如下:

n	1	2	3	4	5	6
b	1	2	3	4	5	6
c	6	17	34	57	86	121
a	9	41	115	249	461	769
$I(n)$	$I(1)$	$I(2)$	$I(3)$	$I(4)$	$I(5)$	$I(6)$

$$\text{其中 } \left\{ \begin{array}{l} I(1) : 1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3 \\ I(2) : 2^3 + 17^3 + 40^3 = 41^3 \\ I(3) : 3^3 + 34^3 + 114^3 = 115^3 \\ I(4) : 4^3 + 57^3 + 248^3 = 249^3 \\ I(5) : 5^3 + 86^3 + 460^3 = 461^3 \\ I(6) : 6^3 + 121^3 + 768^3 = 769^3 \end{array} \right.$$

□

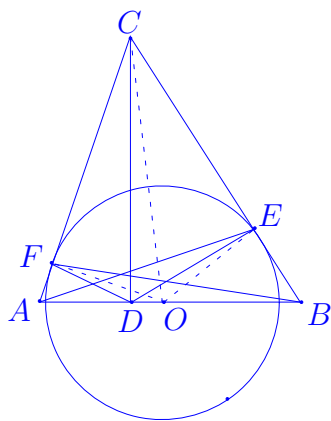
第 5 章

幾何

1. 給定一個 $\triangle ABC$, 其兩邊 BC 及 AC 分別與圓 O 相切於 E 及 F 點, 已知線段 AB 通過圓心 O , 且 CD 垂直 AB 於 D 點

(a) 試證：直線 CD 是 $\angle EDF$ 的角平分線；

(b) 試證： AE, BF, CD 三線共點



- 解** (a) 由 C, F, D, O 四點共圓, 可得 $\angle CDF = \angle COF$, 同理, 由 C, D, O, E 四點共圓, 可得 $\angle CDE = \angle COE$, 因 $\triangle COF \cong \triangle COE$, 故 $\angle COF = \angle COE$, 於是可得 $\angle CDF = \angle CDE$, 此證明了直線 CD 為 $\angle EDF$ 的角平分線 □

- (b) 由 $\triangle AOF \sim \triangle ACD$, 可得 $\frac{AF}{AD} = \frac{OF}{CD}$
 同理, 由 $\triangle BOE \sim \triangle BCD$, 可得 $\frac{BE}{BD} = \frac{OE}{CD}$
 因 $OF = OE$, 故 $\frac{AF}{AD} = \frac{BE}{BD}$
 又因 $CE = CF$, 於是得 $\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$
 因此, 由 Ceva 定理知 AE, BF, CD 三線共點 \square

2. 設 $\triangle ABC$ 三邊長 $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c$, 三內角為 α, β, γ ,
 面積為 Δ , 設 G 為 $\triangle ABC$ 內部一點滿足 $\angle GAB = \angle GBC = \angle GCA = \omega$,

試證：

- (1) $\cot \omega = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma$
 (2) $\cot \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$

解

- (1) 在 $\triangle AGC$ 中, $\angle AGC = 180^\circ - \omega - (\alpha - \omega) = 180^\circ - \alpha$
 在 $\triangle BGC$ 中, $\angle BGC = 180^\circ - \omega - (\gamma - \omega) = 180^\circ - \gamma$
 考慮 $\triangle AGC, \triangle BGC$ 及 $\triangle ABC$ 知正弦定律：

$$\frac{GC}{\sin(\alpha - \omega)} = \frac{b}{\sin \angle AGC} \Rightarrow \frac{GC}{\sin(\alpha - \omega)} = \frac{b}{\sin \alpha} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{GC}{\sin \omega} = \frac{a}{\sin \angle AGC} \Rightarrow \frac{GC}{\sin \omega} = \frac{a}{\sin \gamma} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = 2R \dots\dots\dots (3)$$

由 (1)(2)(3) 消去 a, b 及 GC , 得

$$\frac{b}{\sin \alpha} \sin(\alpha - \omega) = \frac{a}{\sin \gamma} \sin \omega \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sin(\alpha - \omega) = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \sin \omega$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha - \omega) \sin \beta \sin \gamma = \sin^2 \alpha \sin \omega = \sin \alpha \sin \omega \sin(\beta + \gamma)$$

$$\text{故 } (\sin \alpha \cos \omega - \cos \alpha \sin \omega) \sin \beta \sin \gamma = \sin^2 \alpha \sin \omega = \sin \alpha \sin \omega (\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma)$$

兩邊同除以 $\sin \alpha \sin \omega \sin \beta \sin \gamma$ 得

$$\cot \omega - \cot \alpha = \cot \gamma + \cot \beta$$

$$\text{所以 } \cot \omega = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma \quad \square$$

- (2) 由面積公式知： $2\Delta = bc \sin \alpha = ac \sin \beta = ab \sin \gamma$,
 由餘弦定理知：

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \cdot \cos \beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \cdot \cos \gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\ \Rightarrow \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{bc}{2\Delta} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4\Delta} \\ \text{同理, } \cot \beta &= \frac{a^2+c^2-b^2}{4\Delta}, \cot \gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{4\Delta} \\ \text{故, } \cot \omega &= \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}\end{aligned}$$

□

3. 給定一個圓內接四邊形 $ABCD$ 對於四邊形 $ABCD$ 的外接圓上異於 A, B, C 與 D 的任意點 P , 設直線 PC 與直線 AB 交於 E , 直線 PD 與直線 AB 交於 F , 試證:

$$\frac{\overline{AF} \cdot \overline{BE}}{\overline{EF}} \text{ 為定值 (即與 } P \text{ 的位置無關)}$$

解 不論點 P 在外接圓的那一段弧上, 都可得

$$\frac{\overline{AF} \cdot \overline{BE}}{\overline{AB} \cdot \overline{EF}} = \frac{(S_{\triangle PAF}) \cdot (S_{\triangle PBE})}{(S_{\triangle PAB}) \cdot (S_{\triangle PEF})} = \frac{(\overline{PA} \cdot \overline{PF} \sin \angle APF)(\overline{PB} \cdot \overline{PE} \sin \angle BPE)}{(\overline{PA} \cdot \overline{PB} \sin \angle APB)(\overline{PE} \cdot \overline{PF} \sin \angle EPF)} = \frac{\frac{\sin(\widehat{AD})}{2} \times \sin(\frac{\widehat{BC}}{2})}{\frac{\sin(\widehat{AB})}{2} \times \sin(\frac{\widehat{CD}}{2})}$$

因為上式左端的 \overline{AB} 與右端的比值都是與點 P 無關的定值, 所以, 可知比值 $\frac{\overline{AF} \cdot \overline{BE}}{\overline{EF}}$ 為定值

□

4. 平面上有三個圓兩兩相交, 每兩個圓的交決定一條公共弦。試找出這三條公共弦之間所有可能的關係(如互相垂直、平行、交於一點、交於兩點...), 並證明之。

解 如圖, 若三圓的圓心在同一條線上, 因為兩圓的公共弦垂直於它們的連心線, 所以三條公共弦互相平行。若三圓的圓心不共線, 設 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 的交點為 P , E 為圓 O_2, O_1 一個交點, 延長 \overline{EP} 與圓 O_2, O_1 分別交於 G, H ; 則在圓 O_1 中,

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} \dots\dots\dots (1)$$

在圓 O_2 中,

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PE} \cdot \overline{PG} \dots\dots\dots (2)$$

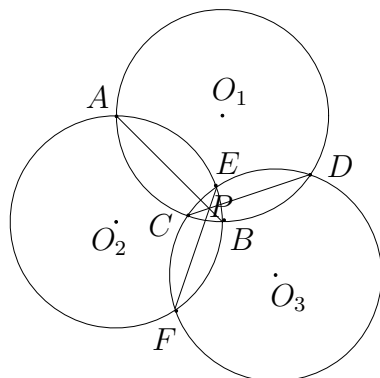
在圓 O_3 中,

$$\overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PE} \cdot \overline{PH} \dots\dots\dots (3)$$

由 (1)(2) 可得 $\overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PE} \cdot \overline{PG} \dots\dots\dots (4)$

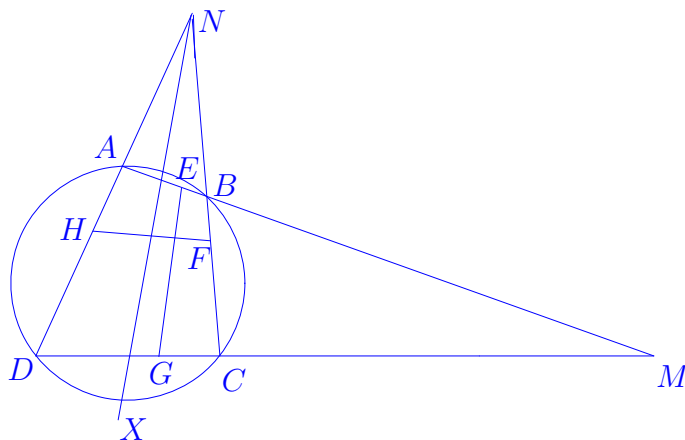
由 (3)(4) 又可得 $\overline{PE} \cdot \overline{PH} = \overline{PE} \cdot \overline{PG}$

所以 $\overline{PH} = \overline{PG}$, 即 G 與 H 重合。同理, G 與兩圓 O_2, O_3 的交點 F 也重合。所以三個圓的三條公共弦 $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$ 交於一點。 \square

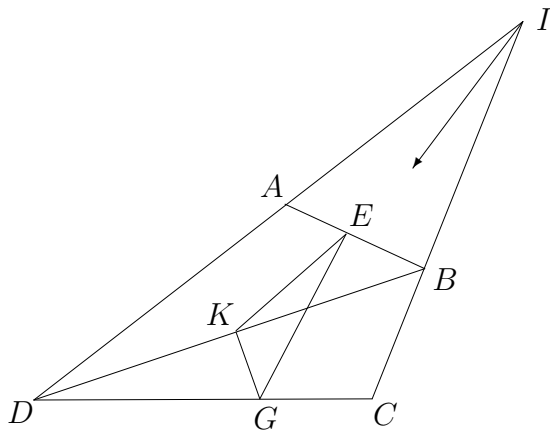


5. 已知四邊形 $ABCD$ 內接一圓, E, F, G, H 四點分別在 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ 邊上, 且 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}, \frac{\overline{AH}}{\overline{HD}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}$ 。設直線 AD 與 BC 相交於 L 點, 直線 AB 與 CD 相交於 M 點 (如附圖)。連 $\overline{EG}, \overline{FH}$ 。試證明:

- (1) \overline{EG} 平行於 $\angle ALB$ 之平分線 \overline{LX} 。
- (2) \overline{EG} 與 \overline{FH} 互相垂直。



證明 1°. 設 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}$ 交予 I ,



在 \overline{DB} 上取 K , 使 $\overline{EK} // \overline{AD}$, 聯 \overline{GK} , 則 $\overline{GK} // \overline{BC}$,

$$(\because \frac{DG}{GC} = \frac{AE}{EB} = \frac{DK}{KB})$$

$$\text{且 } \frac{EK}{AD} = \frac{AE}{EB}, \frac{GK}{BC} = \frac{DG}{GC},$$

$$EK = \frac{BE}{AE+BE} \cdot AD = \frac{1}{\frac{AE}{BE}+1} \cdot AD = \frac{1}{\frac{AD}{BC}+1} \cdot AD = \frac{1}{\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}}$$

$$GK = \frac{DG}{DG+GC} \cdot BC = \frac{1}{1+\frac{GC}{DG}} \cdot BC = \frac{1}{1+\frac{AC}{AD}} \cdot BC = \frac{1}{\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}}$$

$$\therefore \overline{EK} = \overline{GK}$$

作 $\overline{IX} // \overline{GE}$ 則 $\angle KEG = \angle AIX$

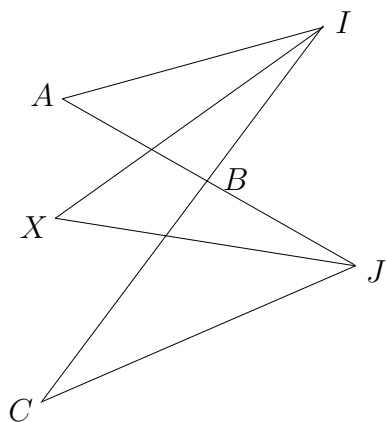
$$\angle KGE = \angle XIB$$

$\Rightarrow \overline{IX}$ 為 $\angle AIB$ 之角平分線

$\therefore \overline{GE} // \angle AIB$ 之角平分線

同理 $\overline{FH} // \angle AB$ 為 \overline{CD} 交角之平分線

2°. 如下圖,



\overline{IX} 平分 $\angle AIB$

\overline{JX} 平分 $\angle BJC$

$$\Rightarrow \angle IXJ = \frac{1}{2}\angle A + \angle C$$

3°. 由 2°.

\overrightarrow{AB} 與 \overrightarrow{CD} 交角之平分線 \perp \overrightarrow{AD} 與 \overrightarrow{BC} 交角之平分線
(即 $\angle AIB$) (即 $\angle BJC$)

($\because A, B, C, D$ 共圓, $\therefore \angle IAB$ 與 $\angle BJC$ 互補)

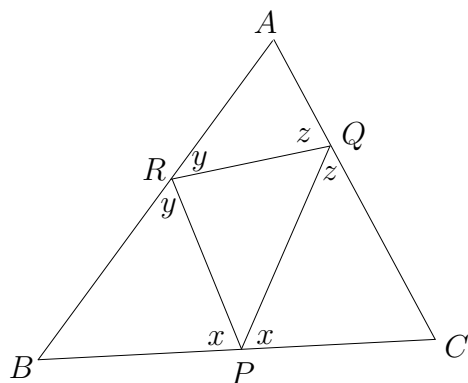
由 1°. $\therefore \overline{GE} \perp \overline{FH}$

□

6. 設 $\triangle ABC$ 為銳角三角形, P 在 \overline{BC} 上, Q 在 \overline{AC} 上, R 在 \overline{AB} 上。若 $\triangle PQR$ 為 $\triangle ABC$ 所有內接三角形中周長最小者, 試證: $\overline{AP}, \overline{BQ}, \overline{CR}$ 分別為 $\triangle ABC$ 三邊的高。

證明 設 $\triangle PQR$ 為 $\triangle ABC$ 中所有內接三角形中有最小周長者

- (1) 則視 P, Q 為定點, R 為 \overline{AB} 上一點使 $\overline{PR} + \overline{QR}$ 為最小,
於是 $\angle PRB = \angle QRA$,
同理可證 $\angle AQR = \angle CQR, \angle CQP = \angle BPR$



設 $\angle BPR = \angle CPQ = x$, $\angle CQP = \angle AQR = y$,

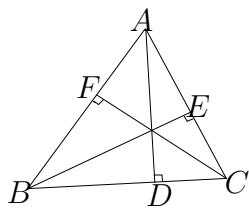
$\angle ARQ = \angle BRP = z$

則: $\angle A + y + z = \angle B + z + x = \angle C + x + y = 180^\circ$

$$(180^\circ - 2x) + (180^\circ - 2y) + (180^\circ - 2z) = 180^\circ$$

解之得: $x = \angle A, y = \angle B, z = \angle C$

(2) 設 $\triangle DEF$ 為垂足三角形



$\because \overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 為三高 $\therefore B, D, E, A$ 四點共圓 $\Rightarrow \angle CED = \angle B$

又 C, E, F, D 四點共圓 $\therefore \angle AEF = \angle B$

故知 $\angle CED = \angle AEF = \angle B$

同理: $\angle BDF = \angle CDE = \angle A, \angle AFE = \angle BFD = \angle C$

- (3) 由 (1)(2), $\triangle PQR$ 的各邊必與垂足三角形 $\triangle DEF$ 互相平行,
因此: $\triangle PQR$ 必為垂足三角形

即 $\overline{AP}, \overline{BQ}, \overline{CR}$ 分別為 $\triangle ABC$ 三邊的高

□

7. 設 $ABCD$ 為一個四面體; K, L, M, N 四點分別在 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ 上
(異於頂點)。證明 K, L, M, N 四點共平面的充要條件為

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} = 1$$

證明 (i) 若 K, L, M, N 四點共平面, 令此明面為 E

過 A, B, C, D 分別向平面 E 作垂線, 令垂足分別為 A', B', C', D'

則 $\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}, \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}}, \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{DD'}}, \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AA'}}$

所以

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{DD'}} \cdot \frac{\overline{DD'}}{\overline{AA'}} = 1$$

(ii) 若

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} = 1$$

K, L, M 三點決定一個平面, 設此平面為 E , 因為 A 與 B 在 E 的異側, B 與 C 在 E 的異側, C 與 D 在 E 的異側, 所以 A 與 D 在 E 的異側, B 也就是說線段 \overline{AD} 與平面 E 有一交點, 令此交點為 N' 。由 (i) 知

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} = 1$$

所以

$$\frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{DN'}}{\overline{N'A}}$$

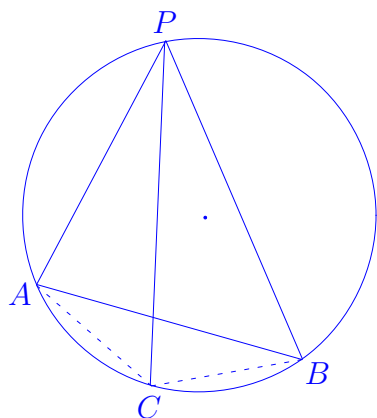
但 N, N' 都在 \overline{DA} 上, 所以 N' 與 N 必重合, 即 N 點也在平面 E 上, 即 K, L, M, N 四點共平面。□

8. 設 P 是 $\triangle ABC$ 內部一點, 直線 AP 與 \overline{BC} 交於 D , 直線 BP 與 \overline{CA} 交於 E , 直線 CP 與 \overline{AB} 交於 F 。若 $\overline{AP} : \overline{PD} = \overline{BP} : \overline{PE} = \overline{CP} : \overline{PF}$, 試證 P 是 $\triangle ABC$ 的重心。

證明 在 $\triangle PBC$ 與 $\triangle PEF$ 中, 因為 $\frac{\overline{BP}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PF}} (=r)$ 且 $\angle BPC = \angle EPF$, 所以, $\triangle PBC \sim \triangle PEF$, 由此得 $\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = r$ 且 $\angle PBC = \angle PEF, \overline{BC} \parallel \overline{EF}$ 。同理, $\frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = r, \overline{CA} \parallel \overline{FD}, \overline{AB} \parallel \overline{DE}$ 。因為 $EFBD$ 與 $EFDC$ 都是平行四邊形, 所以, 對邊長相等。於是, $\overline{BD} = \overline{EF} = \overline{CD}$, 即: D 是 \overline{BC} 的中點, E 是 \overline{CA} 的中點, F 是 \overline{AB} 的中點。由此可知 P 是 $\triangle ABC$ 的重心。□

9. 設圓內兩弦 AB, CD 交於圓內一點 E , 在直線段 EB 的內部取一點 M , 然後過點 D, E, M 作圓, 在過 E 作此圓的切線分別交直線 BC, AC 於點 F, G , 證明: $\frac{AM}{MB} = \frac{GE}{EF}$ 。

證明 過 D 作 A, M, B 的連線



證明 當 P 移動到 A 點時, $\overline{AP} = 0$, $\overline{BP} = \overline{AB}$, $\overline{CP} = \overline{AC}$

故猜測這個定值是 $\overline{AB} : \overline{AC}$

連 \overline{AC} , \overline{AB} , 由 *Ptolemy* 定理

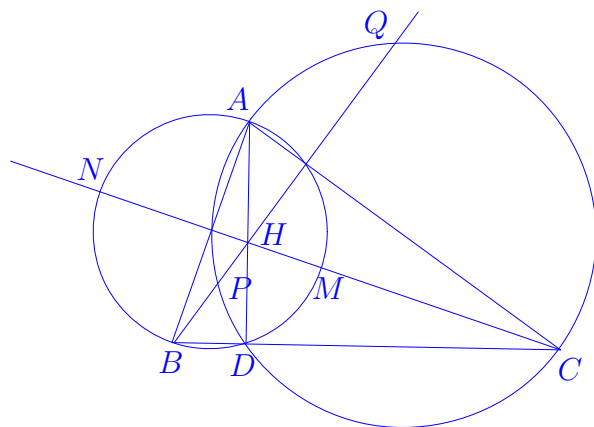
$$\overline{AP} \cdot \overline{BC} + \overline{AC} \cdot \overline{BP} = \overline{AB} \cdot \overline{PC}$$

$$\therefore \overline{AC} = \overline{BC}$$

$$\therefore (\overline{AP} + \overline{BP}) : \overline{PC} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

□

12. 平面上給定一個銳角三角形 ABC , 過頂點 B 的高交以 AC 為直徑的圓於 P, Q , 過頂點 C 的高交以 AB 為直徑的圓於 M, N , 求證: M, N, P, Q 共圓。



證明 設 \overline{AD} 為 \overline{BC} 邊上的高, H 為重心,

$$\because A, N, D, M \text{ 共圓} \therefore \overline{AH} \cdot \overline{HD} = \overline{NH} \cdot \overline{HM}$$

$$\because A, P, D, Q \text{ 共圓} \therefore \overline{AH} \cdot \overline{HD} = \overline{PH} \cdot \overline{HQ}$$

$$\therefore \overline{NH} \cdot \overline{HM} = \overline{PH} \cdot \overline{HQ}$$

$$\therefore M, N, P, Q \text{ 共圓}$$

□

13. 若設 A, B, C, D 為平面上四個相異點, 則 $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$ 等號成立的充要條件是 A, B, C, D 依序為圓上的四個點。

證明 設 $A(z_1)B(z_2)C(z_3)D(z_4)$ 為複數平面上的四個相異點,

$$\text{又 } \because (z_2 - z_1)(z_4 - z_3) + (z_3 - z_2)(z_4 - z_1) = (z_3 - z_1)(z_4 - z_2)$$

$$\therefore |z_2 - z_1||z_4 - z_3| + |z_3 - z_2||z_4 - z_1| \geq |z_3 - z_1||z_4 - z_2|$$

$$\text{等號成立} \Leftrightarrow (z_4 - z_3)(z_2 - z_1) \text{ 與 } (z_3 - z_2)(z_4 - z_1) \text{ 有相同方向}$$

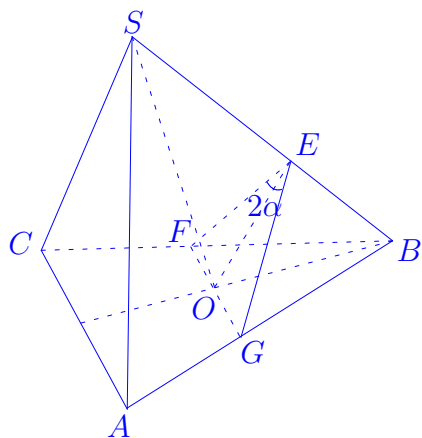
$$\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_1} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_3 - z_2} = r, r > 0$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_1} + \arg \frac{z_4 - z_3}{z_3 - z_2} = 0^0$$

$$\Leftrightarrow A, B, C, D \text{ 為共線或共圓四點}$$

□

14. 已知三角錐 $S-ABC$ 中, 底 ABC 為正三角形, S 在 $\triangle ABC$ 中心的正上方, 且相鄰的兩側面的二面角為 2α , 底面中心到側棱的距離 $OE = 1$, 如圖所示。



求 $S-ABC$ 之體積。

解 作 $\overline{EG} \perp \overline{SB}$, \overline{EG} 交 \overline{AB} 於 G , 作 $\overline{EF} \perp \overline{SB}$, \overline{EF} 交 \overline{BC} 於 F ,
 則 $\angle FEG = 2\alpha$,
 由正三角錐的對稱性, $\triangle EBG \cong \triangle EBF$

$$\therefore EG = EF, BG = BF, FG \parallel AC$$

\therefore 過一點而垂直於一直線的所有直線都在同一平面上,

$\therefore EF, OE, EG$ 在一同一平面上, 又 $\therefore F, O, G$ 都在平面 ABC 上

$\therefore F, O, G$ 在一條線上, $\therefore FO = OG, AC = \frac{3}{2}FG$

在等腰 $\triangle FEG$ 中, $FG = 2OE \cdot \tan \alpha \Rightarrow AC = 3 \tan \alpha$

在正 $\triangle ABC$ 中, $OB = \frac{\sqrt{3}}{3}AC = \sqrt{3} \tan \alpha$

在直角 $\triangle OEB$ 中, $EB = \sqrt{OB^2 - OE^2} = \sqrt{3 \tan^2 \alpha - 1}$

$$\therefore \triangle OEB \sim \triangle SOB \therefore SO = \frac{OE \cdot OB}{EB} = \frac{\sqrt{3} \tan \alpha}{\sqrt{3 \tan^2 \alpha - 1}}$$

$$\therefore V_{S-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot OS$$

$$= \frac{9 \tan^3 \alpha}{\sqrt{3 \tan^2 \alpha - 1}}$$

□

回目錄

第 6 章

組合

1. $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, A_1, A_2, \dots, A_t 是 X 的不同子集, $F = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$ 是 X 的子集族, 如果 F 中的任兩個集合 $A_i, A_j (1 \leq i < j \leq t)$ 互不包含, 求證, F 中的元素個數至多為 $C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n$

證明 (1) 設 $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 為 X 中元素的一個排列, 其前面 k 個元素恰可以組成某一個 A_i 的排法有 $k!(n-k)!$ 個, ($k = |A_i| = A_i$ 中的元素個數)

(2) 因為 F 中沒有任兩元素互相包含, 因此, 若 $A_i, A_j \in F, i \neq j, |A_i| = k, |A_j| = l, Y_1, Y_2$ 皆為 X 中元素的一個排列, Y_1 的前 k 個元素組成 A_i, Y_2 的前 l 個元素組成 A_j , 則 $Y_1 \neq Y_2$

(3) 設含有 k 個元素的 A_i 有 f_k 個, ($k = 1, \dots, n$), 則 $\sum_{k=1}^n f_k k!(n-k)! \leq n!$

(4) 所求的個數

$$\sum_{k=1}^n f_k \leq C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n \cdot \sum_{k=1}^n f_k \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} \leq C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n \dots\dots\dots (I) \quad \square$$

註: 在 (I) 中, 前面的不等式能成立的原因是在所有的 C_k^n 中以 $C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n$ 最大, 因此, 對 $k = 1, 2, \dots, n$

$$C_{\frac{n}{2}}^n \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} \geq 1$$

而後半段的不等式能成立的原因爲 (3) 的結果

2. 將自然數 n 寫成 k 個自然數的和, 即:

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k (1 \leq k \leq n, n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots \leq n_k \leq 1)$$

稱該和是 n 的一個 k 分拆, 以 $P(n, k)$ 表 n 的不同 k 分拆的總數,

證明: $P(n, k)$ 滿足 $P(n+k, k) = P(n, 1) + P(n, 2) + \cdots + P(n, k)$

證明 等式左邊表示 $n+k$ 的 k 分拆數, 而右邊表示 n 不大於 k 的分拆數總數和,

設前一種分拆構成集合 X , 後一種分拆構成集合 Y

我們定義一個由 $X \rightarrow Y$ 的映射 f 如下:

令 X 中, $n+k = (n_1+1) + (n_2+1) + \cdots + (n_m+1) + 1 + 1 + \cdots + 1$
(共 k 項), $1 \leq m \leq k$

對應到 Y 中

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m + 0 + 0 + \cdots + 0 \text{ (共 } k \text{ 項)}$$

$$\text{即 } f((n_1+1) + (n_2+1) + \cdots + (n_m+1) + 1 + 1 + \cdots + 1)$$

$$= (n_1 + n_2 + \cdots + n_m + 0 + 0 + 0 + \cdots + 0)$$

易証此函數爲 1 對 1, 且映成, 因此, $|X| = |Y|$,

即所欲証之等式成立 □

註: (1) 證明中, 有一個 n 的 m 分拆即有一個 $(n_1+1) + (n_2+1) + \cdots + (n_m+1) + 1 + \cdots$ 與它對應, 故爲一對一且映成

(2) 欲証兩集合元素相等, 常用的手段之一便是在兩集合之間, 建立一個“對射”(一對一且映成)

3. $a = n!, b = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \cdots \times 2m$

證明 $a = b$ 是不可能的

證明 用反証法:

$$\text{設 } n! = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2m = 2^m \cdot m! \quad m \geq 2$$

$$\Rightarrow n > 3 \Rightarrow 3|n! \text{ 且 } 3|2^m \cdot m!$$

在 $n!$ 及 $2^m \cdot m!$ 中, 含有的 3 的冪次應是相同的

$\Rightarrow n!$ 至多比 $m!$ 多出 2 個相乘的項, (否則會多出一個 3 的因數)

(1) 若 $n = m + 1$, 則

$$n! = 2^m m! \Rightarrow m + 1 = 2^m \Rightarrow m = 1 \text{ 與 } m \geq 2 \text{ 矛盾}$$

(2) 若 $n = m + 2$

$$\Rightarrow (m + 2)(m + 1) = 2^m \Rightarrow m = 0 \text{ 依然與 } m \geq 2 \text{ 矛盾}$$

由 (1)(2) 可知, $n!$ 不可能等於 $2^m \cdot m!$

□

4. 設 n 為一個正整數, 集合 $S = \{1, 2, \dots, 2n\}$ 的一個排列 $\{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$ 中, 如果有 $|x_i - x_{i+1}| = n$, 對某個 i 成立, 那麼這個排列稱為具有性質 p , 求證: 具有性質 p 的排列多於不具有性質 p 的排列

證明 $n = 1$ 時, 本結果明顯成立。

假設 $n = 2$ 。

構造兩個集合:

$A = \{x | x \text{ 為一個 } S \text{ 的排列, } x \text{ 不具有性質 } p\}$

$B = \{x | x \text{ 為一個 } S \text{ 的排列, } x \text{ 中恰有一個 } |x_i - x_{i+1}| = n\}$

要證明不具有 p 性質的排列數 $|A|$ 小於具有性質 p 的排列數 m

我們利用證明 $|A| \leq |B| < m$ 來完成:

首先從 A 到 B 做一個對應

設 $(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \in A \Rightarrow \forall i \quad i \leq i \leq 2n - 1$ 均有 $|x_i - x_{i+1}| \neq n$

$\because |x_1 - x_2| \neq n$ 但存在唯一的 x_k 滿足 $|x_1 - x_k| = n, k \geq 3$

我們可將 x_1 調至 x_k 之前, 而形成一個新的排列

$(x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_1, x_k, \dots, x_{2n})$ 這個排列只有 $|x_1 - x_k| = n$

$\Rightarrow (x_2, x_3, \dots, x_1, x_k, \dots, x_{2n}) \in B$

顯而易見, 這個對應由

$(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{2n}) \rightarrow (x_2, x_3, \dots, x_1, x_k, \dots, x_{2n})$ 為 $1 - 1$, 因此

$|A| \leq |B| \dots \dots \dots (1)$

另一方面, $|B|$ 顯然小於 m (2)

由 (1)(2) 可知, $|A| \leq |B| < m$ 這就証明了本題的命題 \square

5. 從 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中選出 k 項的嚴格遞增數列, 每相鄰兩項的差不大於 m , 且 $m(k-1) < n$, 問有多少種不同的選法?

解 設所取的遞增數列的第一項為 $x_1 + 1$, 第 2 項為 $(x_1 + 1) + (x_2 + 1), \dots$, 第 k 項為 $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \dots + (x_k + 1)$

其中 $0 \leq x_i \leq m-1, (2 \leq i \leq k)$

$\because (x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \dots + (x_k + 1) \leq n$

設 $x_2 + x_3 + \dots + x_k = r \Rightarrow 0 \leq x_1 \leq n - k - r$

$\therefore x_1$ 可以取 $n - k - r + 1$ 個值

對應於每一個 x_1 的取值, 只要再能算出合於 $0 \leq x_i \leq m-1$ 及 $x_2 + x_3 + \dots + x_k = r$ 的條件的 x_2, x_3, \dots, x_k 整數解的組數 α_r 求出, 而我們欲求的選法就是

$\sum \alpha_r (n - k - r + 1) \dots \dots \dots (1)$

其中 α_r 恰為 $(1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1})^{k-1}$ 展式中 x^r 的係數.... (*)

而 $\sum \alpha_r (n - k - r + 1) = (n - k + 1) \sum \alpha_r - \sum r \alpha_r$

在式中只要能求出 $\sum \alpha_r$ 及 $\sum r \alpha_r$ 即可

由 $(1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1})^{k-1} = \sum \alpha_r x^r \dots \dots \dots (2)$

$\Rightarrow (1 + 1 + 1 + \dots + 1)^{k-1} = \sum \alpha_r \Rightarrow \sum \alpha_r = m^{k-1} \dots \dots \dots (3)$

在 (3) 式中, 令 $x = 1 + y$

$\Rightarrow (1 + (1 + y) + (1 + y)^2 + \dots + (1 + y)^{m-1})^{k-1} = \sum \alpha_r (1 + y)^r$

$\Rightarrow (m + \frac{1}{2}(m-1)my + (1 + 3 + 6 + 10 \dots)y^2 + \dots)^{k-1} = \sum \alpha_r (1 + ry + C_2^r y^2 + \dots + y^r)$

$\Rightarrow m^{k-1} + m^{k-2} \cdot (k-1) \cdot \frac{1}{2}m(m-1)y + \dots = \sum \alpha_r (1 + ry + C_2^r y^2 + \dots + y^r)$

比較 y 項係數得 $\sum r \alpha_r = (k-1)m^{k-1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \dots \dots (4)$

\Rightarrow 所求的選法為

$\sum \alpha_r (n - k - r + 1) \quad (\because (1))$

$= (n - k - r) \cdot m^{k-1} - (k-1)m^{k-1} \cdot \frac{m-1}{2} \quad (\because (3), (4))$

$$= m^{k-1}(n - \frac{1}{2}(k-1)(m-1)) \quad \square$$

解法中, (*) 表現的方法稱為母函數方法, 這種方法對求有限制的整數解求法有相當大的效果, 值得進一步研讀!

6. $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}, A \subset S$ 將 A 中元素由大到小排列後, 由最大的數開始, 輪流地減, 加後一個數, 以大小排列後, 為 $9, 6, 4, 3, 1$ 其交錯和為:
 $9 - 6 + 4 - 3 + 1 = 5$
 求所有可能交錯和的和

解 將 S 的子集分為兩類:

一為不含 n 的子集 F , 即

$$F = \{x \subset S | n \notin x\}$$

另一類為含 n 的子集 F' , 即

$$F' = \{x \subset S | n \in x\}$$

(1) $\because n \notin x \Rightarrow$ 所有 $\{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ 的子集個數 $|F| = 2^{n-1}$

(2) 設 $A \in F'$, 令 $A - \{n\} = B \Rightarrow B \in F$

(3) 構造一個函數 $f: F' \rightarrow F$ 且 $f(A) = B$ 則 f 為 $1-1$

(4) 設 $A = \{n, x_1, x_2, \dots, x_m\}, n > x_1 > x_2 > \dots > x_m$

$$\Rightarrow B = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

$$A \text{ 之交錯和為 } n - x_1 + x_2 - \dots + (-1)^m x_m$$

$$B \text{ 之交錯和為 } x_1 - x_2 + x_3 - \dots + (-1)^{m-1} x_m$$

$$A \text{ 與 } B \text{ 之交錯和的和為 } n$$

(5) 這種交錯和的和共有 $|F|$ 對

$$\therefore \text{所有的交錯和的和為 } n \cdot 2^{n-1}$$

\square

7. 一個由字母 A 或 B 組成的 "字", 在其不同的排列中, 若在 A 之後出現了 B , 我們稱為一個 " AB ", 以同樣的方式可以定義出 " BA " " AA "

”BB”，例如在下列的”字”

AABBAAAABAABBBB 中我們可以讀出：

5 個”AA”，4 個”BB”，3 個”AB”，2 個”BA”

請你求出用 15 個字母 A 或 B，其中恰有 2 個”AA”，5 個”BB”，3 個”AB”，4 個”BA”，不同的”字”共有多少個？

解

若這個字由 A 開頭，且有 3 個”AB”，必有

AA...ABB...BAA...ABB...BA...AB...BAA...A 的形式，其中僅能有 2 個或 3 個”BA”與題意不合，故不能由 A 開頭，

因此，這個”字”必由 B 開頭，且有下列的形式：

BB...BAA...ABB...BA...AB...BA...AB...BA...A

設這個”字”中，從頭開始依序有 n_1 個 B，之後有 m_1 個 A，之後有 n_2 個 B， m_2 個 A， n_3 個 B， m_3 個 A， n_4 個 B， m_4 個 A，

每 n_1 個 B 就有 $n_1 - 1$ 個”BB”， m_1 個 A 就有 $m_1 - 1$ 個”AA”，
.....， n_4 個 B 就有 $n_4 - 1$ 個”BB”， m_4 個 A 就有 $m_4 - 1$ 個”AA”，
由題意的要求，我們有：

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1) + (n_4 - 1) = 5$$

$$(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + (m_3 - 1) + (m_4 - 1) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 9 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 6 \end{cases} \quad \text{其中 } n_1, n_2, n_3, n_4, m_1, m_2, m_3, m_4 \in N$$

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 9$ 的正整數解為 C_3^8 ，而

$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 6$ 的正整數解為 C_3^5 ，

∴總共有 $C_3^8 \times C_3^5 = 560$ 個不同的”字”

□

8. 正八邊形 ABCDEFGH 中，一隻猴子由頂點 A 以一次由一個頂點跳到相鄰頂點的方式，跳向對頂 E，且達到 E 點時即停止跳動。設 p_n 表示猴子由 A 經 n 步的跳動到 E 的不同路徑的方法數，

求證： $u_{2m-1} = 0, u_{2m} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}) \quad m = 1, 2, 3, \dots$

$\alpha = 2 + \sqrt{2}, \beta = 2 - \sqrt{2}$

證明 設由頂點 A 經 n 步，跳到 A, B, C, D, E 的方法數，分為 a_n, b_n, c_n, d_n, e_n ，

其中 $p_n = e_n$, 不難導出:

$$\begin{cases} e_n = 2d_{n-1} \dots\dots\dots (1) \\ d_n = c_{n-1} \dots\dots\dots (2) \\ a_n = 2b_{n-1} \dots\dots\dots (3) \\ c_n = bn - 1 + d_{n-1} \dots\dots\dots (4) \\ b_n = a_{n-1} + c_{n-1} \dots\dots\dots (5) \end{cases}$$

由 (1)(2) 得 $d_{n-1} = \frac{1}{2}e_n, c_{n-1} = d_n = \frac{1}{2}e_{n+1}$ 代入 (4)

$\Rightarrow b_{n-1} = \frac{1}{2}(e_{n+2} - e_n)$ 由 (3) 得 $a_n = e_{n+2} - e_n$

代入 (5) 得到 $e_{n+3} - 4e_{n+1} + 2e_{n-1} = 0$, 即

$$p_{n+4} - 4p_{n+2} + 2p_n = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$n = 1, 2, 3, 4 \text{ 分別得到 } p_1 = p_2 = p_3 = 0, p_4 = 2 \dots\dots\dots (7)$$

(6) 式的特徵方程式為

$x^4 - 4x^2 + 2 = 0$ 其特解分別為

$$\alpha_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \alpha_2 = -\alpha_1, \alpha_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \alpha_4 = -\alpha_3$$

\therefore 其通解為:

$p_n = [A_1 + (-1)^n A_2] \alpha_1^n + [A_3 + (-1)^n A_4] \alpha_3^n$ 代以 (7) 的初始條件得:

$$\begin{cases} (A_1 - A_3) \alpha_1 + (A_3 - A_4) \alpha_3 = 0 \\ (A_1 + A_3) \alpha_1^2 + (A_3 + A_4) \alpha_3^2 = 0 \\ (A_1 - A_3) \alpha_1^3 + (A_3 - A_4) \alpha_3^3 = 0 \\ (A_1 + A_3) \alpha_1^4 + (A_3 + A_4) \alpha_3^4 = 2 \end{cases}$$

可以解得 $A_1 = A_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \alpha_3^2, A_3 = A_4 = \frac{-1}{4\sqrt{2}} \alpha_1^2$

\Rightarrow 當 $n = 2m - 1$ 時 $p_n = 0$

$$\begin{aligned} n = 2m \text{ 時 } p_{2m} &= \frac{\alpha_1^2 \alpha_3^2}{2\sqrt{2}} [(\alpha_1^2)^{m-1} - (\alpha_3^2)^{m-1}] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}) \end{aligned}$$

□

9. 有 n 個元素, a_1, a_2, \dots, a_n , 組成 n 個元素對 p_1, p_2, \dots, p_n

已知, 唯且唯若 a_i 與 a_j 組成一對 "對" 時, p_i 及 p_j 有公共元

證明: 每個 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 中的元素, 都屬於 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 中的兩個元素對

證明 令 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, $\overline{B} = \{(p_i, p_j) : i <$

$j, p_i \cap p_j \neq \phi\}$, 從已知得 $|\overline{B}| = |B| = n \dots\dots\dots (1)$

設每個 a_i 出現在 d_i 個 B 中的元素對,

$\Rightarrow d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2n$ ($\because B$ 中有 n 個元素對, 每個元素對有兩個元素組成) $\dots\dots\dots (2)$

$\overline{B} = \sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} \dots\dots\dots (3)$

(1), (3) $\Rightarrow \sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} = n \dots\dots\dots (4)$

由 (2) 及 (4) 知

$d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 = 4n, \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2d_i d_j = 4(n^2 - n)$

所以 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_i - d_j)^2 = (n-1) \sum_{i=1}^n d_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2d_i d_j = 0$

$d_1 = d_2 = \dots = d_n$

故 $d_1 = d_2 = d_3 = \dots = d_n = 2$, 即表示每個 A 中的元素恰出現在 B 中的兩個元素中 □

10. 已知自然數 n , 自然數的數列 $a_1, a_2, \dots, a_k (k \geq n)$ 叫做 n 普遍數列, 其充要條件為: 由數列中劃掉部份項後可以得到 $1, 2, 3, \dots, n$ 的任一個排列, (例如 $n = 3$, 數列 $1, 2, 3, 1, 2, 1, 3$ 是普遍的, 因為一定可以留下 $1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 1, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; 3, 2, 1$ 而 $1, 2, 3, 2, 1, 3, 1$ 不是普遍的, 因為無論如何留都無法留下排列 $3, 1, 2$)

(1) 舉出 $n^2 - n + 1$ 項的 n 普遍數列

(2) 證明 n 普遍數列不少於 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 項

(3) 証明: 長度最短的 n 普遍數列由 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 項組成

解

(1) 將 $1, 2, 3, \dots, n$ 重覆寫 $(n-1)$ 次, 並在尾部補上一個 1

$\underbrace{1, 2, 3, \dots, n}_{\text{第一組}}, \underbrace{1, 2, \dots, n}_{\text{第二組}}, \dots, \underbrace{1, 2, \dots, n}_{(n-1)\text{組}}, 1$ 即為所求 □

事實上如果排列 k_1, k_2, \dots, k_n 中有某些連續的項是遞增的, 則這些項可以取自同一組, 其餘各項則在各組中去挑, 如果 k_1, k_2, \dots, k_n 為完全逆序, 則最後一個 "1" 就發生關鍵作用

(2) 用數學歸納法證明

當 $n = 1$ 時 顯然成立

設 $n = k - 1$ 時 結論成立, 接下來考慮 $n = k$ 的情形

$n = k$

$1, 2, 3, \dots, k$ 這 k 個數中, 必有一數在數列的第 k 項後必有

$1, 2, \dots, (k - 1)$ 的普遍數列, 因此

$$k + \frac{1}{2}(k - 1)k = \frac{1}{2}k(k + 1) \quad \square$$

(3) 設 I_n 為 n 普遍數列的最小長度, 顯然 $I_1 = 1, I_2 = 3$

$n = 3$ 時若某個數在數列中, 只出現 1 次,

則此數列的長度 $> I_2 + 1 + I_2 = 7$

若每一個數在數列中不只出現過一次, 則有一個數(例如 3)第一

次在第 3 項或第 3 項之後出現, 並且在它後面至少有一個 3 及 I_2

項由 1, 2 所組成的 2 普遍數列, 則此數列的長度 $\geq 3 + 1 + I_2 = 7$,

因此 $I_3 \geq 7$, 同理:

$I_4 \geq 4 + 1 + I_3 = 12$, 這表示 I_4 至少要 12 項, 但須實際構造一個普遍數列, 事實上,

$1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 4, 2, 3, 1$ 是一個 4 普遍數列 \square

11. 對任何自然數 $n \geq 3$, 在歐氏平面上存在一個 n 個點的集合, 使得每一對點之間距離是無理數, 並且每三個點所構成的三角形為非零的有理數, 試証之

證明 本題為一個存在性的證明, 因此只要能構選出一個實例, 即已証明了本題, 現在進行構造

(1) 在函數 $y = x^2$ 上取點 $P_i = (i, i^2), i = 1, \dots, n$ 易知無任何三點共線, 故所構成的 \triangle 面積必不為零

(2) 任兩點之間的距離為

$$|P_i P_j| = \sqrt{(i - j)^2 + (i^2 - j^2)^2} = |i - j| \sqrt{1 + (i + j)^2} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\therefore (i+j)^2 < (i+j)^2 + 1 < (i+j+1)^2$$

$\therefore \sqrt{(i+j)^2 + 1}$ 為無理數

(3) $\triangle P_i P_j P_k$ 的面積為

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & i & i^2 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & k & k^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i) \in Q$$

這證明了我們所構造的 n 個點的集合合於題意的要求 \square

12. 對一個由已知互異的實數數列 $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ 進行一次 "操作", 是指: 將第一項與第二項比較, 若且唯若後者較小時, 互換兩者位置, 然後將新的第二項與第三項比較, 在次將較小的換到前面, \dots 直到末二項互相比較, 將小的放在前面。例如:

$$1, 9, 8, 7 \rightarrow 1, \underline{9}, 8, 7 \rightarrow 1, 8, \underline{9}, 7 \rightarrow 1, 8, 7, 9$$

為一次操作, 此時由 $1, 9, 8, 7$ 變為 $1, 8, 7, 9$ 顯然任一已知數列均可透過有限次的操作, 使其成為一個遞增數列。今設 $n = 40$, 且 r_1, r_2, \dots, r_{40} 互不相同, 並隨機排列, 設以約分數 $\frac{p}{q}$ 表示經過一次操作之後, 將原來的第 20 項 r_{20} 換到第 30 項 r_{30} 的機率, 求 $p + q$ 之值

解 經過一次操作使 r_{20} 變為新數列的第 30 項的充要條件為

$$r_{20} = \max\{r_1, r_2, \dots, r_{30}\} \text{ 且 } r_{20} < r_{31}$$

\Leftrightarrow 在前 31 項中第 31 項最大, 第 20 項次大

$$\Rightarrow \text{機率為 } \frac{29!}{31!} = \frac{1}{930} \Rightarrow p + q = 930 + 1 = 931 \quad \square$$

13. 有一千張號碼分別為 $000, 001, \dots, 999$ 的證券及一百個號碼分別為 $00, 01, \dots, 99$ 的匣子, 如果匣子的號碼能由證券的號碼刪去一個數字得到, 那麼這張證券就可以放入該匣子, 求證:

- (1) 能將所有的證券放進 50 個匣子
- (2) 不能將證券放入少予 40 個匣子
- (3) 設證券號碼為四位數, 且匣子的號碼可以由證券的號碼刪去兩個數字得到時, 就允許將證券放入這個匣子, 求證: 所有四位號碼的證

券可以放進 34 個匣子

- 解** (1) 將 $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ 分割為 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
 A, B 各可以組成 $5^2 = 25$ 個號碼的匣子, 更明確的說法, 編號為:
 00, 01, 02, 03, 04; 10, 11, 12, 13, 14; 20, 21, 22, 23, 24; 30, 31, 32, 33, 34;
 40, 41, 42, 43, 44 及 55, 56, 57, 58, 59; 65, 66, 67, 68, 69; \dots ; 95, 96, 97, 98, 99,
 這 50 個匣子就足夠 □
- (2) 號碼全同者, 必須放入 00, 11, 22, \dots , 99 等十只匣中, 所以這十個
 匣子為必須使用
 號碼全不相同者有 $10 \times 9 \times 8 = 720$ 張, 必須放入號碼數字不同
 的匣中, 每一個這種匣子, 最多只能放入 $3 \times 8 = 24$ 張證券, 因
 此要用到 $720 \div 24 = 30$ 只匣子
 \therefore 最少要用 $10 + 30 = 40$ 只匣子 □
- (3) 因可放入下列編號的匣子:
 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 33, 34, 35, 43, 44, 45, 53, 54, 55, 66, 67,
 68, 69, 76, 77, 78, 79, 86, 87, 88, 89, 96, 97, 98, 99 □

14. 空間中有 2001 個點, 其中任三點不共線, 把它們分成點數不同的 30 組, 在三個不同的組中各取一點為頂點, 作三角形, 要使三角形的總數最多, 各組的點數應為多少?

解 設各組點數依序為 a_1, a_2, \dots, a_{30} 且
 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{30}$
 首先要証明, 欲使三角形總數最多則每一組點數差不能超過 2, 用反
 証法
 設有 a_k 及 a_{k+1} 之差不少於 3 即 $a_{k+1} - a_k \geq 3$
 我們分別計算兩種分法所產生的三角形總數

- (1) 有二組(第 k 組與第 $k+1$ 組)之點數差不少於 3 者

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{1 \leq i < j < r \leq 30} a_i a_j a_r \\
&= a_k \cdot a_{k+1} \cdot \sum_{\substack{1 \leq i \leq 30 \\ i \neq k, k+1}} a_i + (a_k + a_{k+1}) \cdot \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq 30 \\ i, j \neq k, k+1}} a_i a_j \\
&\quad + \sum_{\substack{1 \leq i < j < r \leq 30 \\ i, j, r \neq k, k+1}} a_i a_j a_r \\
&= a_k a_{k+1} \cdot A + (a_k + a_{k+1})B + C
\end{aligned}$$

(2) 將 (1) 中的分法在第 $k+1$ 組減少一個點, 而 k 組增加一個點

$$M = (a_k + 1)(a_{k+1} - 1)A + [(a_k + 1) + (a_{k+1} - 1)]B + C$$

比較 M, N 得 $M > N$, 這証明了, 若有二組點數超過 2 則所得的三角形總數會變少

其次要証明, 即使有點數差為 2 的組, 這種差 2 的 "組對" 最多為一對, 仍然用反証法設 $a_m - a_{m-1} = 2, a_{k+1} - a_k = 2, (k+1 < m-1)$ 分別以兩種方式計算

(3) 有兩組對的差為 2 的情形:

$$\begin{aligned}
N' &= \sum_{1 \leq i < j < r \leq 30} a_i a_j a_r \\
&= a_k a_m \cdot \sum_{\substack{1 \leq i \leq 30 \\ i \neq k, m}} a_i + (a_k + a_m) \cdot \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq 30 \\ i, j \neq k, m}} a_i a_j \\
&\quad + \sum_{\substack{1 \leq i < j < r \leq 30 \\ i, j, r \neq k, m}} a_i a_j a_r \\
&= a_k a_m \cdot A' + [(a_k + 1) + (a_m - 1)] \cdot B' + C'
\end{aligned}$$

(4) 在第 (3) 中第 m 組減少一個點, 而 k 組增加一個點

$$M' = (a_k + 1)(a_m - 1)A' + [(a_k + 1) + (a_m - 1)]B' + C'$$

比較 N' 及 M' 得 $M' > N'$, 與原題意要求不合

以上的論點，証明了雖然題目說個組的點數目要不同，但要達到三角形的點數最多，一個必要的分法為，各組的個數越接近越好，從這個結論我們可以知道將 2001 個點分為 30 組，會有下列的兩種情形之一：

(a) 每組的點數不同

即設 $a_1 = a, a_2 = a + 1, a_3 = a + 2, \dots, a_{30} = a + 29$

果若如此，則 $2001 = a + a + 1 + a + 2 + \dots + a + 29 = 30a + 435$

這是不可能的，因為等號右邊為 5 的倍數而左邊不為 5 的倍數，所以分組方法為：

(b) $a, a + 1, a + 2, \dots, a + k, a + k + 2, a + k + 3, \dots, a + 30$

$$\Rightarrow 2001 = 30a + \frac{30}{2} \cdot 31 - (k + 1)$$

$$\Rightarrow 2001 = 30a + 465 - (k + 1) \text{ 得 } a = 52, k = 22$$

\therefore 分法為 52, 53, 54, 55, \dots , 74, 76, 77, 78, \dots , 82

□

15. 設 $f: N \rightarrow N$ 滿足

$$f(1) = 1$$

$$f(2n + 1) = f(2n) + 1$$

$$f(2n) = 3f(n)$$

求 $f(n)$ 的值域？

解 先作一些試驗，找出

$$f(1) = 1, f(2) = 3f(1) = 3, f(3) = f(2 \cdot 1 + 1) = 3 + 1 = 4,$$

$$f(4) = f(2 \cdot 2) = 3 \cdot f(2) = 9, f(5) = f(2 \cdot 2 + 1) = 9 + 1 = 10,$$

$$f(6) = f(2 \cdot 3) = 3 \cdot f(3) = 12, f(7) = f(2 \cdot 3 + 1) = 12 + 1 = 13,$$

$$f(8) = 27, f(9) = 28, f(10) = 30$$

發現數列 $\{1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, 27, 28, 30, \dots\}$

$$= \{3^0, 3^1, 3^1 + 1, 3^2, 3^2 + 1, 3^2 + 3^1, 3^2 + 3^1 + 3^0, 3^3, 3^3 + 3^0, 3^3 + 3^1, \dots\}$$

假設 n 的 2 進位表示法為

$$n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_2$$

則 $f(n) = (a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)_3$

用歸納法證明:

$n = 1$ 時 $f(1) = 1 = (1)_3$ 假設成立

設 $n < k$ 時 假設成立, $n \geq 2$ 對 $n = k$ 時, 可分為奇偶討論

若 n 為奇數時:

$$k = (a_p a_{p-1} \cdots a_1 1)_2 \quad k-1 = (a_p a_{p-1} \cdots a_1 0)_2$$

$$f(k) = f(k-1) + 1 = (\overline{a_p a_{p-1} \cdots a_1 0})_3 + 1$$

$$= (a_p a_{p-1} \cdots a_1 1)_3 \text{ 命題成立}$$

若 n 為偶數時:

$$k = (a_p a_{p-1} \cdots a_1 0)_2 \Rightarrow \frac{k}{2} = (a_p a_{p-1} \cdots a_1)_2$$

$$f(k) = 3f(\frac{k}{2}) = 3(a_p a_{p-1} \cdots a_1)_3 = (a_p a_{p-1} \cdots a_1 0)_3$$

命題成立,

這說明了無論 k 為奇偶, 假設成立 □

16. 設 $f: N \rightarrow N$ 若把 $f^2(n) = f(f(n)), \cdots, f^m(n) = f^{m-1}(f(n))$

已知: $f^p(n) = n + k$, p, k 為某固定自然數, 對任意 $n \in N$ 成立。

求證: f 存在的充要條件為 $p|k$

證明 (\Leftarrow) 若 $p|k \Rightarrow$ 存在 $s \in N$, 使得 $k = ps$

考慮若 $f(n) = n + s \Rightarrow f(n)$ 滿足 $f^p(n) = n + ps = n + k$ 這說明了有這樣的 f 存在

(\Rightarrow) 設 $f(n)$ 存在, 令 $A_1 = N - f(N)$

$\because f^p(n) = n + k \Rightarrow |A_1|$ 是有限值

可令 $A_2 = N - f^2(N) = A_1 \cup f(A_1)$

$$A_3 = N - f^3(N) = A_1 \cup f(A_1) \cup f^2(A_1), \cdots$$

$$A_p = N - f^p(N) = A_1 \cup f(A_1) \cup f^2(A_1) \cup \cdots \cup f^{p-1}(A_1)$$

不難得到 $f^i(A_1) \cap f^j(A_1) = \phi$, 若 $i \neq j$

且 $|f^i(A_1)| = |A_1|$

$$\Rightarrow |A_p| = k, |A_p| = |A_1| + |f(A_1)| + \cdots + |f^{p-1}(A_1)| = p|A_1|$$

$$\Rightarrow p|k$$

□

17. 集合 B 由 n 個元素組成, B 中最多有多少個三元子集, 其中任兩個子集都恰有一個公共元?

解 現有若干個三元子集, 任兩子集的交集恰有一元, 可分為下列三種狀況:

- (1) B 中的每一個元素均出現在恰好兩個三元子集中,
 設 $\{a, b, c\}$ 為其中的一個三元子集, 則其他的任何三元子集均與 $\{a, b, c\}$ 的交集非空, 且這些與 $\{a, b, c\}$ 有非空交集的僅有一個子集有 a , 一個子集有 b , 一個子集有 c , 因此, 子集最多的數字為 $1 + 3 \times 1 = 4$ 個。
- (2) B 中的某一個元出現在 3 個三元子集中, 其餘元出現在頂多 3 個三元子集,
 設 $\{a, b, c\}$ 為其中的一個三元子集, 且有三個三元子集中有 a , 則另有頂兩個三元子集中有 b , 亦另有頂多兩個三元子集中有 c , 因此至多有 $3 + 2 + 2 = 7$ 個所求的三元子集, 此時 $n \geq 7$
- (3) B 中某元素 a 在至少四個三元子集中, 則這四個子集的其他兩元, 兩兩不同, 其他的 3 元子集中每個也都應有 a (如果有一個三元子集 A 沒有 a , 則 A 中與前述的四個子集都有公共元素, 而導致 $|A| \geq 4$, 這是矛盾)
 於此情形下, 頂多有 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 個三元子集, 此時 $n \geq 9$

設 a_n 為所求最多三元子集的個數, 易見 $a_1 = a_0 = 0, a_3 = a_4 = 1, a_5 = 2$
 $n = 6$ 時, 從上面知: 頂多有 4 個三元子集,

設 $B = \{a, b, c, d, e, f\}$

則取三元子集集為 $\{\{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{e, f, a\}, \{b, d, f\}\}$

$\Rightarrow a_6 = 4$

$n \in \{7, 8, 9, 10, \dots, 16\}$ 時, 則 (3) 的情形有可能出現

合於規定的三元子集個數至多為 $\lfloor \frac{16-1}{2} \rfloor = 7$ 個, 而出現 (1), (2) 的情形

時, 三元子集的個數也至多為 7 個, 現在給出一個實際合規定且三元子集有 7 個的例子:

$B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, 其三元子集集為

$\{\{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{e, f, g\}, \{b, d, f\}, \{a, g, d\}, \{b, g, e\}, \{c, g, f\}\}$

$\Rightarrow a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = \cdots = a_{16} = 7$

當 $n \geq 17$ 時, 從 (1) (2) (3) 知: $a_n \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$

在 B 中取一個元為所有子集的公共元, 且將其他子集兩兩配成一對, 與前述的公共元組成三元子集, 總可以作成合規定的三元子集集, 而這個三元子集集的個數為 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 故 $a_n = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ \square

18. 將集合 C 分割為兩兩不相交的非空子集族 A_1, A_2, \dots, A_n , 再以另一種不同的分割, 劃分為兩兩不相交的非空子集族, B_1, B_2, \dots, B_n $n \geq 2$.

已知: $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n, |A_i \cup B_j| \geq n$

證明 $|C| \geq \frac{n^2}{2}$ 又問 $|C|$ 是否可能等於 $\frac{n^2}{2}$?

證明 (1) 設 $k = \min\{|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|, |B_1|, |B_2|, \dots, |B_n|\}$

不妨設 $k = |A_1|$

$\because \forall i \neq j, B_i \cap B_j = \phi \Rightarrow B_1, B_2, \dots, B_n$ 中滿足 $A_1 \cap B_i \neq \phi$ 的 B_i 至多有 k 個, 不妨設 $B_1, B_2, \dots, B_m \ni A_1 \cap B_j \neq \phi \quad m \leq k, 1 \leq j \leq m$

(2) $\because |B_j| \geq k, \forall k = 1, 2, \dots, n$, 且 $B_i \cap B_j = \phi, i \neq j$,

$\Rightarrow |\bigcup_{i=1}^m B_i| \geq mk$

(3) 考慮 $B_{m+1}, B_{m+2}, \dots, B_n$

當 $j = m+1, m+2, \dots, n$ 時,

$A_1 \cap B_j = \phi \Rightarrow |B_j| \geq n - k \quad (\because |A_1 \cup B_j| \geq n, |A_1| = k)$

$\Rightarrow |C| = |(\bigcup_{i=1}^m B_i) \cup (\bigcup_{j=m+1}^n B_j)| \geq mk + (n - k)(n - m)$

若 $k \geq \frac{n}{2}$ 則 $\forall i = 1, \dots, n \quad |A_i| \geq \frac{n}{2}$

$\Rightarrow |C| \geq n \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$

若 $k < \frac{n}{2}$,

$$\begin{aligned}
\text{則 } |C| &\geq mk + (n-k)(n-m) = n(n-k) - m(n-2k) \\
&\geq n(n-k) - k(n-2k) \quad (\because n > 2k, m \leq k) \\
&= n^2 - 2nk + 2k^2 \\
&= \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} - 2nk + 2k^2 \\
&= \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}(n^2 - 4nk + 4k^2) \\
&= \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}(n-2k)^2 \\
&\geq \frac{n^2}{2}
\end{aligned}$$

所以 $|C| \geq \frac{n^2}{2}$

$|z| = \frac{n^2}{2}$ 不可能成立, 說明如下:

假設 $|C| = \frac{n^2}{2}$

則 n 為偶數, 令 $n = 2\ell$

考慮三種情形:

情形一 有某個 $|A_i| \leq \ell - 1$

因必有某個 $|B_j| \leq k$ ($\because |B_1| + \cdots + |B_{2\ell}| = |C| = 2\ell^2$)

故 $|A_i \cup B_j| \leq |A_i| + |B_j| \leq 2\ell - 1 = n - 1$,

此與假設矛盾

情形二 有某個 $|B_i| \leq \ell - 1$

討論與情況一相同

情況三 每一個 $|A_i| \geq \ell$, 每一個 $|B_i| \geq \ell$,

則每一個 $|A_i| = \ell$, 每一個 $|B_i| = \ell$,

但因有某個 A_i 與某個 B_j 交集不空

故 $|A_i \cup B_j| = |A_i| + |B_j| - |A_i \cap B_j|$

$$\leq |A_i| + |B_j| - 1$$

$$= 2\ell - 1$$

$$= n - 1$$

此與假設矛盾

□

回目錄