

TRML 個人賽-2011 第一回

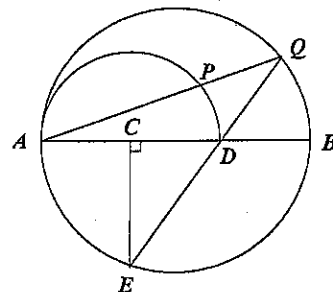
I-1. 設有一個三位數能被 35 所整除，且各位數字之和為 15，則此三位數為_____。

答：735

I-2. 設 a 、 b 、 c 是三實數，滿足 $a+b+c=9$ ， $ab+bc+ca=0$ ，則 $a+b$ 的最大值為_____。

答：12

I-3. 如右圖，以 \overline{AB} 為直徑畫一圓， C 、 D 兩點在 \overline{AB} 上，使得 $\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DB}$ ， Q 、 E 兩點在圓周上使得 Q 、 D 、 E 三點共線且 $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ ，再以 \overline{AD} 為直徑在圓內部畫一半圓，設 \overline{AQ} 交此小半圓於 P 點。若 $\overline{AB}=9$ ，則 \overline{PQ} =_____。



答： $2\sqrt{2}$

TRML 個人賽-2011 第二回

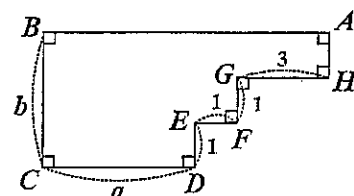
I-4. 滿足方程式 $\frac{5}{4x} + \frac{4}{5y} = \frac{1}{20}$ 的所有正整數對 (x, y) 共有_____組數對。

答：15

I-5. 滿足 $3x^2 - 8[x] + 2 = 0$ 最大的實數 x 為_____。(其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數)

答： $\frac{\sqrt{42}}{3}$

I-6. 如圖，已知 $ABCDEFGH$ 之面積為 11 平方公分，若 a 及 b 均為正整數，則 $a+b$ =_____。

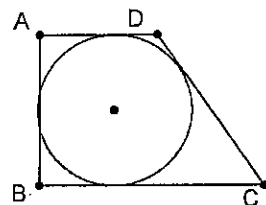


答：5

TRML 個人賽-2011 第三回

- I-7. 梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{BC} > \overline{AD}$ ，且設此梯形有一個半徑等於 1 的內切圓。若梯形 $ABCD$ 的面積等於 7，則 $\overline{DC} =$ _____。

答：5



- I-8. 假設 X 和 Y 是相互獨立的隨機變數， X 只取 1, 2 兩個數值， Y 只取 1, 3 兩個數值。若事件 $X=1$ 的機率是 0.7，且事件 $Y=1$ 的機率是 0.4，則變數 $Z=Y-X$ 的數學期望值為_____。

答：~~0.3~~ 0.9

- I-9. 考慮所有滿足 $\begin{cases} a_1 + a_2 + \cdots + a_{2011} = 2012 \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2011}} = 2012 \end{cases}$ 的 2011 個正數 $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$ ，則對於 $i=1, 2, \dots, 2011$ ，

$a_i + \frac{1}{a_i}$ 的最大值為 _____。

答： $\frac{8045}{2012}$

TRML 個人賽-2011 第四回

- I-10. 若 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的三內角分別為 $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$ 及 $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ ，其外接圓的半徑分別為 5 及 2，則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的面積之比值為 _____。

答： $\frac{25\sqrt{3}}{12}$

- I-11. 從 1 到 35 的 35 個正整數中選取某些數形成一些集合，使得每個集合中最大的數恰為此集合中其餘所有的數之乘積。如果 1 到 35 的每一個數至多只能出現在某一個集合中，則至多能造一個這樣的集合。

答：4

- I-12. 在 k 為整數且滿足 $\begin{cases} 2x + ky = 6 \\ 3x + 2y + 12k = 0 \end{cases}$ 之解 x, y 均為正整數的條件下， k 的最小值為 _____。

答：-7

TRML 接力賽-2011 第一回

《第一回第一棒》

R1-1

已知 n 與 $\sqrt{4n^2 + 113}$ 都是正整數，則 n 之值為何？

答：28

《第一回第二棒》

R1-2

設 T = 前一位隊友傳來的答案。某等差數列共有 m 項，已知此數列前三項的和為 10，末三項的和為 50，且這 m 項的和為 $5T$ ，則 $m = ?$

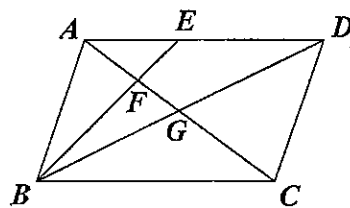
答：14

《第一回第三棒》

R1-3

設 T = 前一位隊友傳來的答案。如圖， $ABCD$ 為平行四邊形， E 為 \overline{AD} 上一點，且 $\overline{AE}:\overline{ED} = 2:3$ ， $\overline{AC} = T$ ，試求 $\overline{FG} = ?$

答：3



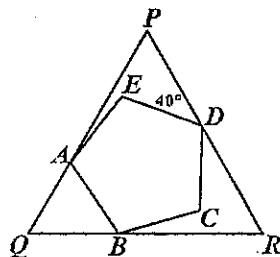
TRML 接力賽-2011 第二回

《第二回第一棒》

R2-1

如圖， $\triangle PQR$ 為正三角形，正五邊形 $ABCDE$ 的頂點 A 、 B 及 D 分別在邊 \overline{PQ} 、 \overline{QR} 及 \overline{RP} 上，且 $\angle PDE = 40^\circ$ ，若 $\angle CBR = x^\circ$ ，則 $x = ?$

答：16



《第二回第二棒》

R2-2

設 T = 前一位隊友傳來的答案。設實數值函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 滿足 $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 3$ ，試求

$f(T) = ?$

答：261

《第二回第三棒》

R2-3

設 T = 前一位隊友傳來的答案。從 a, b, c, d, e, f 六數中，任取三數並計算它們的和，一共有 20 個和，這 20 個和的算數平均數為 T ，則 $a + b + c + d + e + f = ?$

答：522

TRML 團體賽-2011

1. 設有一數列 $\{a_n\}$ ，已知 $a_1 = 7$ ，且對 $n = 2, 3, 4, \dots$ 滿足 $(n+1)a_n = (n-1)a_{n-1}$ ，則 $a_{100} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

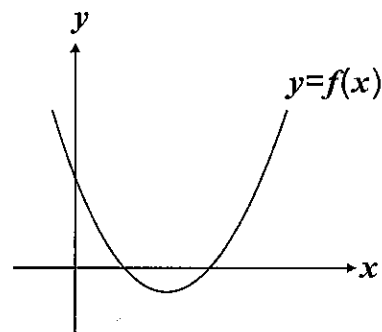
2. 假設 a, b, c 為常數。若多項式 $ax^4 + bx^3 + c(x^2 + x - 2)$ 被 $x+1$ 除之餘式是 27，被 $(x-1)^2$ 除之餘式是 $-4x+7$ ，則三元組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 設 $f(n) = (n+1) \times 0.91^n$ ，其中 n 為正整數，則使得 $f(n)$ 值為最大的 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 設 a, b 為正整數，且所有實數 x 都滿足 $\left| \frac{2ax-b}{2x^2-8x+9} \right| < 1$ ，則 $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

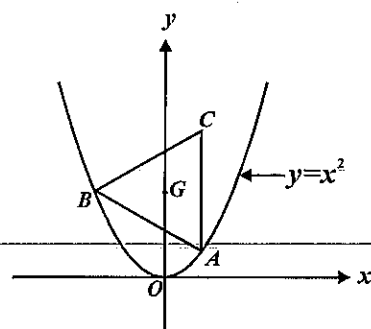
5. 已知圓內接六邊形 $ABCDEF$ 的 6 邊之長依序為 4, 4, 6, 6, 4, 6，則此六邊形 $ABCDEF$ 之面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 設 f, g 均為二次函數，若方程式 $f(g(x)) = 0$ 有 3、1、4 及 p 四個實根，則 p 之最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



7. 在坐標空間中，已知球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 6$ ，平面 $E: 3x + 4y + 5z = 10$ 相交於一圓為 C ，則點 $P(6, 3, 6)$ 與圓 C 上的點之最短距離為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 如圖，正三角形 ABC 中，兩頂點 A 及 B 皆在拋物線 $y = x^2$ 上， $\triangle ABC$ 的重心 G 在 y 軸上，邊 \overline{AC} 與 y 軸平行。若點 A 的 x 坐標為 a ($a > 0$)，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



9. 已知數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 滿足 $a_{k+1} = a_k + 3\log 2$ 或 $a_{k+1} = a_k + \log 5$ 或 $a_{k+1} = a_k - 2$ 三者之一， $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ，且 $a_n = a_1$ 。若 $n > 100$ ，則正整數 n 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 有 15 個正整數 $a_1, a_2, \dots, a_{14}, a_{15}$ 滿足 $a_1 < a_2 < \dots < a_{14} < a_{15}$ 且 $\sum_{i=1}^{15} a_i^2 \leq 2011$ ，則 $a_{12} - a_7$ 可以達到的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

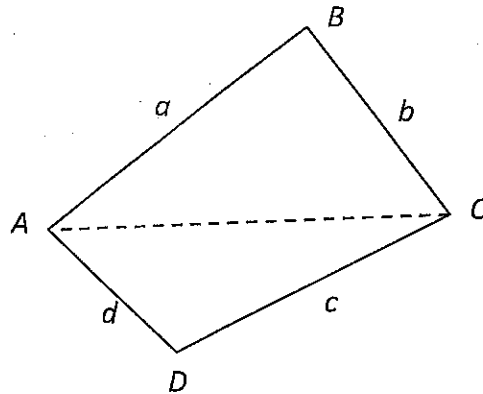
TRML 思考賽-2011

思考賽共 11 題(含第 11 題加分題)，每題均為 4 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但反之後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。

准考編號已由大會直接印於答案紙上，在繳交的答案卷上，不可用其他方式表明隊伍的身份。

任意三角形的兩邊長之和大於第三邊，此三角不等式對四邊形也有類似的結果：
若四邊形 $ABCD$ 的四邊長度分別為 a, b, c, d ，則

$$a < b + c + d, b < c + d + a, c < d + a + b, d < a + b + c. \dots\dots\dots (*)$$



其理由如下：(如圖所示)

利用三角不等式，即可推得 $b + c + d = b + (c + d) > b + \overline{AC} > a$ 。

同理可證，其他的不等式也都成立。

反之，我們也知道：當正數 a, b, c, d 滿足不等式(*)時，一定也存在四邊形 $ABCD$ ，其四邊的長度依序為 a, b, c, d 。事實上，這種四邊形不是唯一的，但其中必有一個四邊形的頂點 A, B, C, D 共圓(即四邊形 $ABCD$ 有一外接圓)，此性質在以下的問題(1)~(3)中將被要求給出一種證明，請依序作答。

(1) 已知 $ABCD$ 為圓內接四邊形，且 $\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 3, \overline{CD} = 2, \overline{DA} = 1$ ，試求 $\cos B$ 之值。

(2) 已知正數 a, b, c, d 依順時針方向可以作為某圓內接四邊形的四邊長度。試證：

不論 a, b, c, d 的順序如何(即 a, b, c, d 的任意重排)，也都可以作為某圓內接四邊形的四邊長度。

(3) 已知 a, b, c, d 都是正數，滿足 $a \geq b, a \geq c, a \geq d$ 且 $a < b + c + d$ 。試證：可以作出一圓內接四邊形 $ABCD$ ，使其四邊的長度分別為 a, b, c, d 。

以下的問題中，我們要進一步探討的問題是：給定正整數 $n \geq 4$ ，會有多少種不同的圓內接四邊形，其周長等於 n ，且四邊的長度都是正整數？首先，我們以 $[a, b, c, d]$ 表示 a, b, c, d 由左而右

排成一列的直線排列，以 (a,b,c,d) 表示 a,b,c,d 依順時針方向排成一圓形的環狀排列；並考慮以下兩個條件：

(i) $a+b+c+d=n$ ，

(ii) a,b,c,d 都是正整數，且為某圓內接四邊形的四邊長。

接著，我們定義兩個函數 $f(n)$ 及 $g(n)$ 如下：

(甲) 函數 $f(n)$ 表示滿足條件(i)及(ii)的直線排列 $[a,b,c,d]$ 之個數；

(乙) 函數 $g(n)$ 表示滿足條件(i)及(ii)的環狀排列 (a,b,c,d) 之個數。

例如：將 $\{3,2,2,1\}$ 由左而右排成一列的直線排列有 $\frac{4!}{1!2!1!}=12$ 種，但這 12 種排列若依順時針方向排成一圓形的環狀排列時，就只能計算以下的 3 種排法：

$$(3,2,2,1), (3,2,1,2), (3,1,2,2)。$$

就幾何意義而言， $f(n)$ 就是周長等於 n 且為整數邊長的圓內接四邊形之個數；而 $g(n)$ 就是這 $f(n)$ 種圓內接四邊形中，在旋轉後相同者視為同一種的四邊形之個數。舉例來說，當 $n=4$ 時，滿足條件的四邊形僅有邊長為 1 的正方形，故直線排列只有一種，即 $[a,b,c,d]=[1,1,1,1]$ ，得知 $f(4)=1$ 。同樣的，環狀排列也只有一種，即 $(a,b,c,d)=(1,1,1,1)$ ，故 $g(4)=1$ 。又如 $n=5$ 時，滿足條件 $a+b+c+d=5$ 的四邊形之邊長有以下 4 種不同的直線排列：

$$[a,b,c,d]=[2,1,1,1],[1,2,1,1],[1,1,2,1],[1,1,1,2]，$$

因此， $f(5)=4$ 。但這 4 種直線排列依順時針方向排成圓形時都屬於同一種環狀排列，即 $(a,b,c,d)=(2,1,1,1)=(1,2,1,1)=(1,1,2,1)=(1,1,1,2)$ ；於是可得： $g(5)=1$ 。

請依序作答以下的問題(4)~(10)及加分題(11)：

(4) 試分別求 $f(6)$ 及 $g(6)$ 之值，並說明理由。

(5) 試分別求 $f(7)$ 及 $g(7)$ 之值，並說明理由。

(6) 給定正整數 n,k ，其中 $n \leq 2k$ 。試問有多少組正整數解 a,b,c,d 同時滿足以下

兩條件：(1) $a+b+c+d=n$ ，(2) $a \geq k$ 。

(7) 給定正整數 n,k ，其中 $n \leq 2k$ 。設 $P(n,k)$ 表示同時滿足以下兩條件的正整數解 a,b,c,d 的個數：

(1) $a+b+c+d=n$ ，(2) $a < k, b < k, c < k, d < k$ 。

試求 $P(n,k)$ 的一般式，並說明理由。

(8) 試求 $f(2k)$ 的一般式，其中 $k \geq 2$ ，並說明理由。

(9) 試求 $f(2k+1)$ 的一般式，其中 $k \geq 2$ ，並說明理由。

(10) 試求 $g(4k)$ 的一般式，其中 $k \geq 1$ ，並說明理由。

【加分題】

(11) 試求 $g(n)$ 的一般式，其中 $n \geq 4$ ，並說明理由。