

國立清水高級中學九十三年度第一學期代理教師甄試  
數學科筆試試題

※全為填充題，請按題號順序依序填寫於答案卷上，務必清楚註明題號  
只須將答案填入答案卷上，無須寫過程（每格五分）

1. 設 $C_1$ 為單位圓， $T_1$ 為 $C_1$ 之內接正三角形， $C_2$ 為 $T_1$ 之內切圓， $T_2$ 為 $C_2$ 之內接正三角形，依此類推。令

$a_i$ 表 $T_i$ 之面積，則 $\sum_{i=1}^5 a_i =$ \_\_\_\_\_。(請化至最簡)

2. 求  $0.22 + 0.0202 + 0.002002 + \dots$  之和為\_\_\_\_\_。

3. 設  $a_n = \frac{3^{n+1}}{(2x-1)^{n-1}}$  則 (1) 數列  $\langle a_n \rangle$  收斂時， $x$  的範圍為\_\_\_\_\_，(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收斂時， $x$  的範圍為\_\_\_\_\_。

4. 一個邊長為  $n$  的大正方形中，共有  $n^2$  個單位正方形，如果每一個單位正方形的邊都恰有一根火柴棒，而此大正方形共用了  $a_n$  根火柴棒，那麼  $a_{n+1} - a_n =$ \_\_\_\_\_。

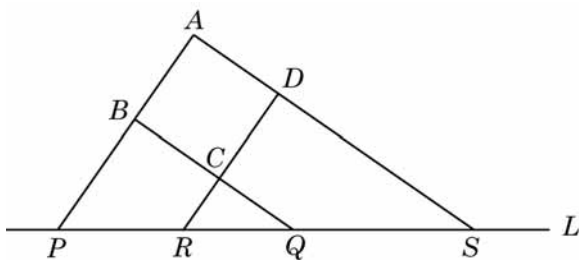
5.  $a, n$  均為自然數，若  $a | n^2 - 3n + 5, a | 2n - 6$ ，則  $a$  的所有可能解為\_\_\_\_\_。

6. 若多項式  $f(x)$  除以  $x^2 + 2x + 3$  的餘式為  $5x + 6$ ，除以  $x - 2$  的餘式為  $-6$ ，求  $f(x)$  除以  $(x^2 + 2x + 3)(x - 2)$  的餘式為\_\_\_\_\_。

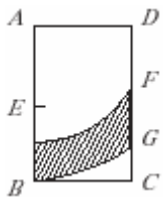
7. 設  $\frac{1}{p} + \frac{1}{3q} = 12$ ，其中  $p, q$  為正數，則  $3 \log_{\frac{1}{3}} p + \log_{\frac{1}{3}} q$  的最大值為\_\_\_\_\_，此時  $(p, q) =$ \_\_\_\_\_。

8. 某人在  $O$  點測量到遠處有一物作等速直線運動。開始時該物位置在  $P$  點，一分鐘後，其位置在  $Q$  點，且  $\angle POQ = 90^\circ$ 。再過一分鐘後，該物位置在  $R$  點，且  $\angle QOR = 30^\circ$ 。請以最簡分數表示  $\tan^2(\angle OPQ) =$ \_\_\_\_\_。

9. 在平面上有一正方形  $ABCD$ ， $AB, BC, CD, DA$  的延長線分別交直線  $L$  於  $P, Q, R, S$ 。已知  $PR = 3, QS = 4$ ，則正方形  $ABCD$  的邊長為\_\_\_\_\_。



10. 如圖矩形  $ABCD$  中， $\overline{AB} = 4, \overline{AD} = 2$ ， $F$  為  $\overline{CD}$  之中點，以  $A$  為圓心， $\overline{AF}, \overline{AB}$  為半徑為二弧，分別交  $\overline{AB}, \overline{CD}$  於  $E$  與  $G$ ，則(1)  $\angle BAG =$ \_\_\_\_\_，(2) 求斜線部分的面積為\_\_\_\_\_。



11. 設  $a = \log_{\frac{1}{7}} 2, b = \log_{\sqrt{3}} 2, c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}, d = \frac{1}{\log_3 7}, e = -1$ ，則這五數中最大者為\_\_\_\_\_，最小者為\_\_\_\_\_。

12. 解不等式  $\log_{0.5}(x^2 + 3x) > -2$ ，則其解為\_\_\_\_\_。

13. 在等比數列  $\langle a_n \rangle$  中， $a_1 = 1, a_4 = 2 - \sqrt{5}, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \geq 1$ 。則  $\langle a_n \rangle$  的公比 = \_\_\_\_\_。

14. 設實係數二次方程式  $x^2 + x + c = 0$  的兩根  $a, b$  都不是實數，而且  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ ，也正是此方程式的兩根，則  $a^2 + b^2$  的數值為\_\_\_\_\_。

15. 在只有皮尺沒有梯子的情形下，想要測出一拋物線形拱門的高度。已知此拋物線以過最高點的鉛垂線為對稱軸。現甲、乙兩人以皮尺測得拱門底部寬為 6 公尺，且距底部  $\frac{3}{2}$  公尺高處其寬為 5 公尺。利用這些數據可推算出拱門的高度為\_\_\_\_\_公尺。(化成最簡分數)

16. 若  $a, b \in \mathbb{Z}, x^4 - x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$  有四個相異有理根，求數對  $(a, b) =$ \_\_\_\_\_。

1.答案： $\frac{1023}{1024}\sqrt{3}$

2.答案： $\frac{8}{33}$

3.答案：(1) $x \geq 2$  或  $x < -1$ (2) $x > 2$  或  $x < -1$

4.答案： $4n+4$

5.答案：1, 2, 5, 10

6.答案： $-2x^2+x$

7.答案：8,  $(\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$

8.答案： $\frac{3}{4}$

9.答案： $\frac{12}{5}$

10.答案： $30^\circ$ ,  $2(\sqrt{3}-1)+\frac{\pi}{3}$

11.答案： $c, e$

12.答案： $-4 < x < -3$  或  $0 < x < 1$

13.答案： $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

14.答案： $-1$

15.答案： $\frac{54}{11}$

16.答案： $(-7, 1)$