

\*請將填充題與計算、證明題依題號順序依次寫在答案卷上，並清楚註明題號

一、填充題 (每題 5 分) (只須將答案填入答案卷上，無須寫過程。答案請化成最簡型態。)

1、平行四邊形  $ABCD$  中， $\overline{BC}$ ， $\overline{CD}$  上各有一點  $P$ ， $Q$ ，已知  $\overline{BP} : \overline{PC} = \overline{CQ} : \overline{QD} = 2 : 1$ ，若  $\overline{AC} = x\overline{AP} + y\overline{AQ}$ ，則數對  $(x, y) =$ \_\_\_\_\_。

2、已知空間中四點  $A(1, 1, 2)$ ， $B(2, 0, 2)$ ， $C(0, -2, 2)$ ， $D(-1, -1, 2)$ ，則四邊形  $ABCD$  在平面  $OAB$  正射影之面積為\_\_\_\_\_。

3、設  $4a_n = a_{n-1} + 4$ ，且  $a_1 = 1$ ，則  $a_n$  的一般式為\_\_\_\_\_。

4、方程式  $z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0$  的根在複數平面上所圍成的多邊形之面積為\_\_\_\_\_。

5、在半徑為 1 的圓上取 6 個六等分點，從中任取三點  $A$ ， $B$ ， $C$ ，則  $\triangle ABC$  面積的期望值為\_\_\_\_\_。

6、二次曲線  $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 34x + 38y - 9 = 0$  的對稱軸方程式為\_\_\_\_\_。

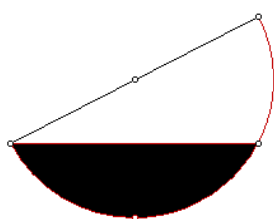
7、若  $(x, y)$  為聯立不等式  $\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x - 2y \leq -4 \\ x + 5y \leq 31 \end{cases}$  所表示圖形上的任一點，且  $P = kx + y$  在  $(1, 6)$  有極小值時，則  $k$  的範圍為\_\_\_\_\_。

8、 $a, b \in N, a \neq b$  且  $a, b$  之最小公倍數為 324，則數對  $(a, b)$  有\_\_\_\_\_組解。

9、 $x \in R$ ，函數  $f(x)$  滿足  $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$  恆成立，則  $|f(x)|$  之最小值為\_\_\_\_\_。

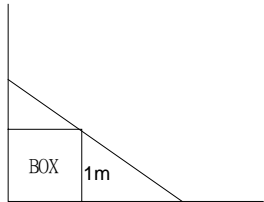
10、數列：1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 9, ..... 的第  $n$  項  $a_n =$ \_\_\_\_\_ (限用  $n$  的一個函數表示)。

11、將半徑為  $a$  的半球體容器裝滿了水，今慢慢的將之傾斜  $\frac{\pi}{6}$ ，則流出水量之體積=\_\_\_\_\_。



12、 $[x]$ 表不大於  $x$  的最大整數，則  $\left[\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{k}}\right] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13、如圖所示，一梯子長  $\sqrt{15}$  m，一端靠在牆上，另一端靠在地板上，並與邊長為 1 公尺之正方形箱子相接觸，試問梯子靠牆一端距地板多高？(有兩個答案，全對才給分)



答:  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14、數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_1 = 1, a_n = \frac{(2n-1)a_{n-1}}{a_{n-1} + 2(2n-3)}, n = 2, 3, 4, \dots$  則  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、計算、證明題(共 30 分)(須寫演算過程，否則不予計分。每題配分標於題末。)

1、 $ABCDEF$  為一圓內接六邊形， $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = a, \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} = b$ ，用  $a, b$  表六邊形之面積？(8 分)

2、用 5 種不同顏色塗一六邊形，每邊一色，顏色可重複使用，相鄰邊必須異色，共有幾種塗法？(8 分)

3、 $n \in N$ ，求  $\cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1} = ?$  (7 分)

4、有二曲線  $\Gamma_1: \sqrt{3}(x^2 - y^2) = 2xy$  與  $\Gamma_2: x^2 - y^2 = c (c > 0)$ 。設  $P$  點是  $\Gamma_1$  與  $\Gamma_2$  的交點， $L_1$  與  $L_2$  分別為  $\Gamma_1$  與  $\Gamma_2$  在  $P$

點的切線，試求：

(1)  $L_2$  的斜率 (4 分)

(2)  $L_1$  與  $L_2$  所夾的銳角。(3 分)

一、

1.	2.	3.	4.	5.
$(\frac{6}{7}, \frac{3}{7})$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4}{3}[1 - (\frac{1}{4})^n]$	$\sqrt{2} + 1$	$\frac{9\sqrt{3}}{20}$
6.	7.	8.	9.	10.
$3x+4y+1=0$	$k \geq 3$	44	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$2[1 + \sqrt{n-1}] - 1$
11.	12.	13.	14.	
$\frac{11}{24}\pi a^3$	18	$\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$	$\frac{2n-1}{2^n-1}$	

二、

1.  $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 + 4ab)$

2. 4100

3.  $\frac{2n^2 - n}{3}$

4. 答：  $\sqrt{3}$      $30^\circ$