2011 年法國高等學院預備班考題及參考解答

1. 給定自然數 n，令 $S_n=\dfrac{1^n+2^n+\cdots+n^n}{n^n}$，試證對所有的 n，$S_n\le\dfrac{e}{e-1}$。

【參考解答】

$$S_n=\frac{1^n+2^n+\cdots+n^n}{n^n}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(1-\frac{k}{n})^n$$

令數列 $<a_n>=<(1-\frac{k}{n})^n>$，首先證明 $<a_n>$ 遞增；

考慮 n 個 $\dfrac{n-k}{n}$ 和 1 這樣 $n+1$ 個正數，滿足算幾不等式(等號不成立)

$$\frac{(n-k)+1}{n+1}>\sqrt[n+1]{(\frac{n-k}{n})^n}\Rightarrow(1-\frac{k}{n+1})^{n+1}>(1-\frac{k}{n})^n\Rightarrow a_{n+1}>a_n$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e^{-k}$

所以 $S_n<1+e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{-(n-1)}<\dfrac{1}{1-e^{-1}}=\dfrac{e}{e-1}$。

2. 已知三角形 ABC，求在內部的點 M，滿足到三邊距離和為最大。

【參考解答】

假設 $BC=a,AC=b,AB=c$，並且 $a>b>c$

M 到 BC、AC、AB 的距離分別為 x、y、z，AB 邊的高為 h，

$$\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}(ax+by+cz)$$

$$ch=ax+by+cz>cx+cy+cz$$

$$h>x+y+z$$

所以越靠近 C 點，距離和越大，所以在三角形內部找不到這樣的點。

3. 是否存在自然數 n 以及 n 個實數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得 $a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx>0$ 對所有實數 x 都成立？

【參考解答】否

假設 $f(x)=a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx$

那麼 $\int_0^{\pi}f(x)=0$，所以 $f(x)$ 的函數值不可能都大於 0。

4. 在坐標平面上滿足$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$的點(x,y)所成的集合是拋物線的一部分嗎？畫出它的圖形。

【參考解答】是

首先會有$x\ge 0, y\ge 0$，

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

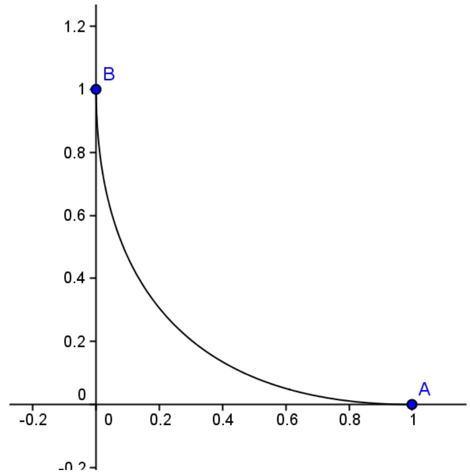
$x+2\sqrt{xy}+y=1$

$2\sqrt{xy}=1-(x+y)$

$4xy=1-2(x+y)+(x+y)^2$

$x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0$

因為$\delta=0$，所以是拋物線。



5. $f:R\to R$為一個函數，a是一個正數是使得對所有實數x，都有

$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f(x)^2}$，試證$f$是一個週期函數。

【參考解答】

顯然$\frac{1}{2}\le f(x)\le 1$

$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-f(x+a)^2}$

$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f(x)^2}-\frac{1}{4}-\sqrt{f(x)-f(x)^2}-f(x)+f(x)^2}$

$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f(x)^2}$

$=\frac{1}{2}+\sqrt{(f(x)-\frac{1}{2})^2}$

$=\frac{1}{2}+f(x)-\frac{1}{2}=f(x)$

故f為一個週期函數。

6. 令 A 是 R 的一個非空子集，我們定義集合 $\hat{A}$ 為 $\hat{A}=\left\{a+a',(a,a')\in A^2\right\}$。

(a) 如果 A 是有限集合且 $Card\ A=n$，試證 $2n-1\le Card\ \hat{A}\le \dfrac{n(n+1)}{2}$

(註：$Card\ A=n$ 表示集合 A 的元素個數為 n)

(b) 設 n 為自然數，找出一個集合 A 使得 $Card\ A=n$ 且 $Card\ \hat{A}=2n-1$ 以及

找出一個集合 B 使得 $Card\ B=n$ 且 $Card\ \hat{B}=\dfrac{n(n+1)}{2}$

【參考解答】

(a) 將 A 中元素由小到大排列 $a_1<a_2<\cdots<a_n$

令 $A_k=\{a_k+a_i \mid i=1,2,\cdots,n\},k=1,2,\cdots n$，那麼 $\hat{A}=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$。

考慮 A_1 和 A_2 之中，有一個相同元素 a_1+a_2，

所以 $A_1\cup A_2$ 最多只有 $n+n-1$ 個元素。

再考慮 $A_1\cup A_2$ 和 A_3，有兩個相同元素 a_1+a_3 和 a_2+a_3，

所以 $A_1\cup A_2\cup A_3$ 最多有 $n+(n-1)+(n-2)$ 個元素。

依此類推，可知 $\hat{A}=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ 最多有

$n+(n-1)+\cdots+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個元素。

另一方面，考慮 A_2 的元素之中，a_2+a_n 必然和 A_1 中的元素不相同，

所以 $A_1\cup A_2$ 至少有 $n+1$ 個元素。

再考慮 A_3 中，a_3+a_n 必然和 $A_1\cup A_2$ 中的元素不相同，

所以 $A_1\cup A_2\cup A_3$ 至少有 $n+1+1$ 個元素。

依此類推，可知 $\hat{A}=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ 至少有

$n+1+1+\cdots+1=2n-1$ 個元素。

故 $2n-1\le Card\ \hat{A}\le \dfrac{n(n+1)}{2}$

(b)

令 $A=\{1,2,3,\cdots,n\}$，那麼 $Card\ A=n$，而

$\hat{A}=\{2,3,4,\cdots,2n\}$，所以 $Card\ \hat{A}=2n-1$。

再令 $B=\{1,2,4,8,\cdots,2^{n-1}\}$，那麼 $Card\ B=n$，而 B 中元素兩兩之和皆不同，

故 $Card\ \hat{B}=\dfrac{n(n+1)}{2}$。

7. 假設 a 和 n 都是自然數，試證：存在自然數 b，使得

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-1}\right)^n=\sqrt{b}-\sqrt{b-1}$ 。

【參考解答】

因為 $\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-1}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n(\sqrt{a})^{n-k}(\sqrt{a-1})^k$ ，

所以當 n 為奇數時，只有 $\sqrt{a}$ 和 $-\sqrt{a-1}$ 兩種根式；

當 n 為偶數時，只有自然數和根式 $-\sqrt{a(a-1)}$ 。

故不論 n 是奇數還是偶數，都可以寫成 $\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-1}\right)^n=\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}$ 。

只要再證明 $a_n-b_n=1$ 即可，

再考慮 $\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)^n=\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}$ ，

兩式相乘 $a_n-b_n=(a-a+1)^n=1$ ，故得證。