2010 年法國高等學院預備班參考解答

1. 比較π^e和e^π的大小。

【參考解答】$e^\pi > \pi^e$

考慮函數 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ，

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ ， $f''(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$ ，

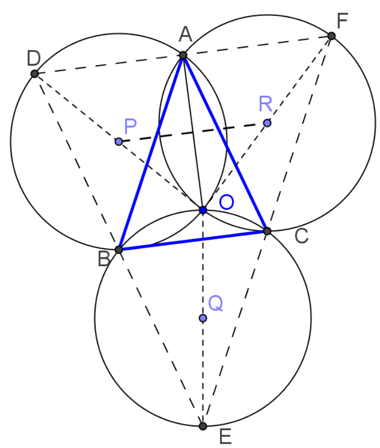
若 $f'(x)=0 \Rightarrow x=e$ ，且 $f''(e)<0$ ，

所以 $f(e)$ 是 f 的最大值， $f(e)>f(\pi)$ ，

$\dfrac{1}{e}>\dfrac{\ln\pi}{\pi} \Rightarrow \pi > e\ln\pi \Rightarrow e^\pi > \pi^e$

2. 有三個半徑為 1 的圓有共同的交點 O，並且兩兩交於另外的 A,B,C 三點，試證 O 為三角形 ABC 的垂心。

【參考解答】



如圖，假設三圓圓心分別為 P,Q,R

作直徑 OD、OE、OF

$\angle OAD = \angle OAF = 90°$，所以 D,A,F 共線；

P、R 分別是 OD、OF 中點，所以 $PR // DF$；

$OA \perp PR$，所以 $OA \perp DF$；

$OD = OF = 2$，所以 A 是 DF 的中點，

同理 B、C 是 DE、EF 中點，$BC // DF$

故 $OA \perp BC$。

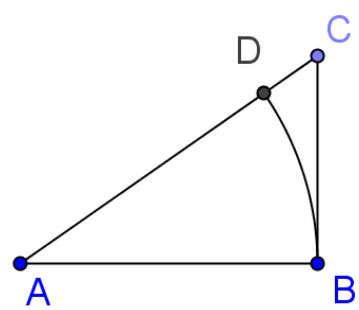
同理得到 $OB \perp AC$ 以及 $OC \perp AB$，

O 是三角形 ABC 的垂心。

3. 設 M 是邊長為 a 的正 n 邊形內部一點，$d_1,\cdots,d_n$ 表示 M 到 n 個邊的距離。

試證：$\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}+\cdots+\dfrac{1}{d_n}>\dfrac{2\pi}{a}$

【參考解答】



引理：若 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ，則 $\tan\theta>\theta$ 。

證明：如圖，$\angle ABC$ 為直角，ABD 為扇形；

令 $AB=1$，$\angle BAC=\theta$

三角形 ABC 面積＞扇形 ABD 面積

$\dfrac{1}{2}\times 1\times\tan\theta > \dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times\theta$ ，所以 $\tan\theta>\theta$

回到原題，我有兩個作法：

【法一】

顯然正 n 邊形面積為 $\frac{1}{2}\times a(d_1+d_2+\cdots+d_n)$，

又由邊長為 a，面積為 $n\times\frac{1}{2}\times a\times\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}=\frac{na^2}{4}\cot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{2}\times a(d_1+d_2+\cdots+d_n)$

所以 $d_1+d_2+\cdots+d_n=\frac{na}{2}\cot\frac{\pi}{n}$

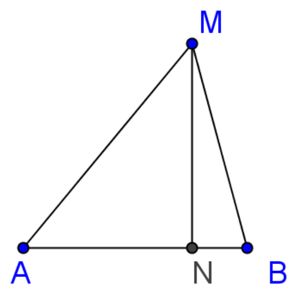
由柯西不等式 $(d_1+d_2+\cdots+d_n)(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_n})\geq n^2$

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_n}\geq n^2\times\frac{2}{na}\times\tan\frac{\pi}{n}>\frac{2n}{a}\times\frac{\pi}{n}=\frac{2\pi}{a}$$

【法二】

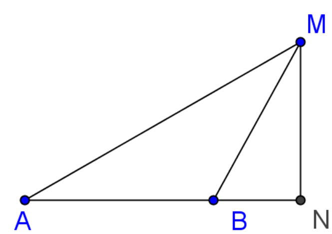
考慮 M 對邊的垂足可能在

(1) 邊上，此時



$$\frac{a}{d}=\frac{AB}{MN}=\frac{AN}{MN}+\frac{BN}{MN}$$
$$=\tan\angle AMN+\tan\angle BMN$$
$$>\angle AMN+\angle BMN=\angle AMB$$

(2) 邊的延長線上，此時



$$\frac{a}{d}=\frac{AB}{MN}=\frac{AN}{MN}-\frac{BN}{MN}$$
$$=\tan\angle AMN-\tan\angle BMN$$
$$\tan\angle AMB=\tan(\angle AMN-\angle BMN)$$
$$=\frac{\tan\angle AMN-\tan\angle BMN}{1+\tan\angle AMN\tan\angle BMN}$$
$$<\tan\angle AMN-\tan\angle BMN$$

所以也有 $\frac{a}{d}>\angle AMB$

於是 $\frac{a}{d_1}+\frac{a}{d_2}+\cdots+\frac{a}{d_n}>2\pi\Rightarrow\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_n}>\frac{2\pi}{a}$

4. 考慮 $f:R\to R$ 的函數，E 是它的圖形的對稱中心所成的集合。

(a) 若 $f(x)=x+\sin x$，找出它的 E 集合。

(b) 假設 E 中至少有兩個不同的點，試證 f 可以寫成一個線型函數和一個週期函數的和。

(c) E 是否能夠有不共線的相異三點？

【參考解答】

(a)

假設對稱中心為(a,b)，顯然$b=f(a)$

$f(a+x)+f(a-x)=2b$

$a+x+\sin(a+x)+a-x+\sin(a-x)=2a+2\sin a$

$\sin a(\cos x-1)=0$

因為要對所有的x都成立，所以$\sin a=0$，$a=n\pi, n\in Z$

並且$b=a$

故$E=\{(n\pi,n\pi)\mid n\in Z\}$

(b)

可以將兩個對稱中心假設為$(0,0),(a,b)$

令$L(x)=\dfrac{b}{a}x$，

考慮$f(x)=L(x)+P(x)$，其中$P(x)=f(x)-L(x)$

那麼會有

$P(x+2a)=f(x+2a)-L(x+2a)$

$=f(a+x+a)-\dfrac{b}{a}x-2b$

$=2b-f(-x)-L(x)-2b$

$=f(x)-L(x)=P(x)$

所以$P(x)$是一個週期函數。

(c)

還沒有完整作法。

5. 在平面P上有一個正三角形ABC，O是它的中心，Δ是通過O且垂直P的一條線，D是Δ上異於O的一點。令$l=AB$ 以及 $e=OD$，試以l,e表示$ABCD$的外接球半徑。

【參考解答】$R=\dfrac{l^2+3e^2}{6e}$

$OA=\dfrac{\sqrt{3}}{3}l$

假設半徑為R

$R^2=(\dfrac{\sqrt{3}}{3}l)^2+(R-e)^2$

$R=\dfrac{l^2+3e^2}{6e}$

6. 令 X 是自然數的非空子集，滿足：對所有的 $x\in X$ ，$4x\in X$ 且 $[\sqrt{x}]\in X$ 。

試證 X＝自然數集。

【參考解答】

因為 X 為自然數的非空子集，所以 X 中至少一個元素，設為 x

存在 n 使得 $x<2^{2^n}$ ，那麼 $1\le\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{x}}}}<2$ (n 重根號)，於是 $1\in X$ ，

進一步有 $4\in X$ 以及 $2\in X$ ，

就有 $2^k\in X,\forall k\in N$ 。

對於其他非 2 的指數的自然數 a，

考慮 $\log_2(a+1)-\log_2 a>0$ ，

由阿基米得性質知道存在 2^m 使得 $2^m\times(\log_2(a+1)-\log_2 a)>1$ ，

也就是存在自然數 p，使得 $2^m\log_2 a<p<2^m\log_2(a+1)$

於是 $a^{2^m}<2^p<(a+1)^{2^m}$

$a\le\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2^p}}}}<a+1$ (m 重根號)，

就有 $a\in X$ 。

故 $X=N$

7. 若 S 表示球心在 O 半徑為 1 的球面，A、B、C 是 S 上面三個點，考慮

$f(A,B,C)=\left\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right\rangle$

試求 f 的最大值和最小值。

【參考解答】最大值 3，最小值 $-\dfrac{3}{2}$

考慮

$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2+2(\left\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right\rangle)$

故 $f(A,B,C)=\dfrac{1}{2}(\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|^2-3)$

顯然 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|$ 的最小值為 0，此時 $f(A,B,C)=-\dfrac{3}{2}$ ；

而 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|$ 的最大值發生在 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ 時，此時 $f(A,B,C)=3$ 。

8. 考慮 n 個字母的排列，記集合 M 表示滿足下述性質的排列：在兩個相同字母之間的字母都不同。例如考慮字母為$\{a,b,c\}$，那麼 $abbacb$ 不在 M 中，而 $bbacbac$ 在 M 中。

(*a*) M 中字母的最大長度為何？

(*b*) M 中有多少個字母的長度是最大長度？

【參考解答】(*a*) $3n$　(*b*) $2^{n-1}\times n!$

(*a*) 首先，同樣字母不可以出現 4 次，因為這樣兩邊的字母中間就有兩個相同的字母了。

又，將字母重複兩次排成一列，也就是排成一個長度為 $3n$ 的字串，例如若是字母為$\{a,b,c\}$，排成 $aaabbbccc$ 顯然滿足條件，所以最大長度為 $3n$。

(*b*) 在上面顯然的排法中，只有將相鄰的不同字母交換才能符合條件，所以會有 $2^{n-1}\times n!$種排列方式。