國立蘭陽女子高級中學 115 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

填充題(每題 5 分，滿分 100 分。請在答案卷第一頁上依照題目順序寫下題號及答案，不須計算過程)

1. a、b、c 為實數，$0\le x<2\pi$，已知 $f(x)=a\sin x+b\cos x+c$ 的最大值為 3，最小值為 -1，且最大值發生在 $x=\frac{11\pi}{6}$ 時。求 $(a+bi)^7=$ $\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos x\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)+C$，$C=1$ $-64+64\sqrt{3}i$

[1] $(-1+\sqrt{3}i)^7=2^7e^{i(\frac{2}{3}\pi)\cdot 7}=2^7e^{i(\frac{2}{3}\pi)}=-64+64\sqrt{3}i$ $(-\frac{1}{2})(\frac{-1}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow a=-1,\ b=\sqrt{3}$

2. 投擲一個均勻的骰子，若擲出 1 點或 6 點則不能再投擲骰子，若擲出其他點數則可繼續投擲骰子，在最多投擲 n 次的限制下，擲出 1 點的機率為 p_n，求 $\lim_{n\to\infty}p_n$ 之值=_____ $\frac{1}{2}$

[2] $\frac{1}{6}\left(1+(\frac{2}{3})+(\frac{2}{3})^2+\cdots\right)=\frac{1}{2}$

3. 將 1，2，3，…，78，依照下述規律分成 n 組：

第 1 組：1

第 2 組：2，3

第 3 組：4，5，6

第 4 組：7，8，9，10

…

第 n 組：…，77，78

[3] n 12 $\frac{12\cdot 13}{2}=78$ 6 $\frac{6\cdot 7}{2}=21$ $16,17,18,19,20,21$

$\frac{1}{12}\cdot 5+\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}=\frac{17}{36}$

2026. 11. 17 (二) ~11. 22 (日) Ru

若從這 n 組中以均等的機率選一組後，再從中以均等的機率選出一個數字，則選出的數字小於 20 的機率為_____(化為最簡分數) $\frac{17}{36}$

[4] $L_1: y=mx+\frac{1}{m}$ $L_2: y=mx-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}$ $L_1=L_2\Rightarrow m^3-3m+2=0$

$x^2=4(\frac{1}{2})(y-\frac{3}{2})$

1	+0	−3	+2	1
	+1	+1	−2	
1	+1	−2		+0
	+1	+2		
1	+2	+0		

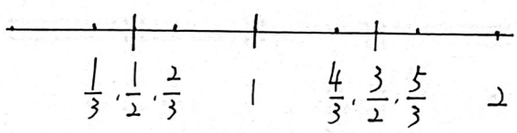
4. 求二拋物線 $y^2=4x$ 與 $x^2=2y-3$ 的公切線方程式。 $(m-1)^2(m+2)=0$ $y=x+1,\ y=-2x-\frac{1}{2}$

[4] 切線公式 $y^2=4cx$ $y=mx+\frac{c}{m}$ $m=1:\ y=x+1$

$x^2=4cy$ $y=mx-cm^2$ $m=-2:\ y=-2x-\frac{1}{2}$ #

5. 數列 $\langle a_n\rangle$ 的一般項為 $a_n=\frac{q_n}{p_n}$，其中 p_n, q_n 均為自然數，若 $a_n\le 2$, $p_n\le 3$，請由小到大寫出 a_n 的所有可能值。 $\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\frac{3}{2},\frac{5}{3},2$

[5]



6. $f(x)=\sin x(1+\cos x)$，$0<x<2\pi$ 的極大值為 M，極小值為 m，求數對 (M,m)。 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4},-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

[6] $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x\Rightarrow f'(x)=\cos x+\cos 2x$ $=2C^2+C-1=(2C-1)(C+1)=0$ $C=\frac{1}{2}$

$f'(x)$: + (0) − ($\pi/3$) − (π) + ($5\pi/3$) + (2π)

$f(x)$: ↑ $3\sqrt{3}/4$ ↓ ↓ $-3\sqrt{3}/4$ ↑ $S=\pm\sqrt{3}/2$

7. 求 $3\tan 10^\circ+4\sqrt{3}\sin 10^\circ$ $\sqrt{3}$

[7] 法1: $\sqrt{3}\left(\frac{2\cos 30^\circ\sin 10^\circ+2\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ}\right)=\sin 40^\circ+\sin 20^\circ=2\sin 30^\circ\cos 10^\circ=\cos 10^\circ$ 分子 → $\sin 40^\circ-\sin 20^\circ+2\sin 20^\circ\Rightarrow\sqrt{3}$

法2: $\sqrt{3}\sin 10^\circ+2\sin(30^\circ-10^\circ)=\sqrt{3}\sin 10^\circ+\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ=\cos 10^\circ$

8. $A=\begin{bmatrix}3&-1\\a&-2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2&b\\-6&3\end{bmatrix}$，若 $AB=BA$，就 n 為正奇數及正偶數兩種情況，分別求 $(A-B)^n$ 之值。(Hint:可先觀察 A^2、B^2)

[8] $\begin{bmatrix}0&3b-3\\-2a+2&ab-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ab-6&2-2b\\3a-18&0\end{bmatrix}\Rightarrow a=6,\ b=1$

$A^2=\begin{bmatrix}3&-1\\6&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\6&-2\end{bmatrix}=A$

$B^2=\begin{bmatrix}-2&1\\-6&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1\\-6&3\end{bmatrix}=B$

$AB=0$ $(A-B)^2=A-B=I$ n is odd $\Rightarrow\begin{bmatrix}5&-2\\12&-5\end{bmatrix}$, n is even $\Rightarrow I$

Created with Scanner Pro