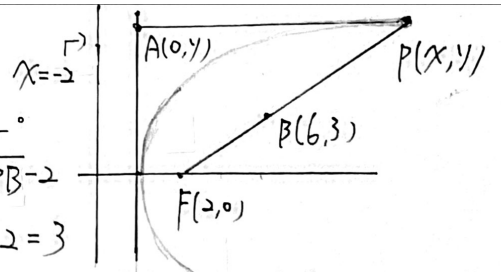
9. 設t為實數，則$2t^2-\sqrt{(2t^2-6)^2+(4t-3)^2}$的最大值為_____。

3

9 $P(2t^2,4t)\in\Gamma: y^2=8x$　$\overline{PA}-\overline{PB}=\overline{PF}-\overline{PB}-2$

$A(0,4t)$, $B(6,3)$ $F(2,0)$　$\le \overline{BF}-2=3$



10. 若a,b,c,d為正整數，$abcd=400$且ab,bc,cd,da為完全平方數，試問序組(a,b,c,d)有_____種可能。

44

10 $400=2^4\cdot5^2$

設 $a=2^{a_1}\cdot5^{a_2}$

$b=2^{b_1}\cdot5^{b_2}$

$c=2^{c_1}\cdot5^{c_2}$

$d=2^{d_1}\cdot5^{d_2}$

$a_1+b_1\equiv b_1+c_1\equiv c_1+d_1\equiv d_1+a_1\equiv 0 \pmod 2$

$\Rightarrow a_1\equiv b_1\equiv c_1\equiv d_1 \pmod 2$（奇偶性相同）

4奇：$\sum_{i=1}^{4}(2y_i+1)=4+4k=14$

$\sum_{i=1}^{4}(2w_i)=2\Rightarrow 4k=4$

4偶：$2x_1+2x_2+2x_3+2x_4=4\Rightarrow 4k=10$

$(10+1)\cdot 4=44$

11. 已知複數α滿足$\alpha^{2026}=1$且$\alpha\neq 1$，若$\beta=\frac{1}{1-\alpha}$，則β的所有可能值之和的實部為_____。

$\frac{2025}{2}$

11 $\frac{1}{1-w^k}+\frac{1}{1-w^{n-k}}=1$, $w^k\notin\mathbb{R}$　$\frac{1}{1-(-1)}+1012=\frac{2025}{2}$

12. ΔABC中，$\overline{BC}=\sqrt{2}$，$\overline{CA}=3+\sqrt{3}$，$\overline{AB}=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$，設$\Gamma$是包含$A$、$B$、$C$作其頂點(不一定連續)的最小正多邊形，求$\Gamma$的面積為_____。

$12+6\sqrt{3}$

12 $b^2=12+6\sqrt{3}$

$c^2=14+8\sqrt{3}$

$a^2=2$, $2ab=2(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$

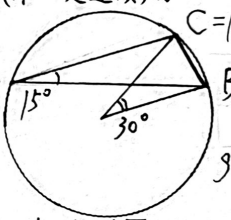
$\cos C=\frac{-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{-1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=-\cos 75^\circ$

$\frac{\sqrt{2}}{\sin A}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

$\sin A=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\cos 15^\circ\cdot\tan 15^\circ$

$=\sin 15^\circ$

$\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=R$



$\gcd(105^\circ,60^\circ,15^\circ)=15^\circ$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{12+6\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 12=12+6\sqrt{3}$ #

13. 已知有一個三次多項式函數$f(x)$滿足以下三個條件：

(1) $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=24$　(2) $\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)}{x+1}=-18$　(3) $\sum_{n=1}^{5}f(n)=-55$

試求$f(x)$與x,y軸所圍成之區域面積為_____。

160

13 $\begin{cases} f'(-1)=0 \\ f''(-1)=-18 \end{cases}\Rightarrow f'(x)=3a(x+1)^2-18(x+1)$

$4\cdot 4\cdot 3a=4\cdot 18+24$

$f'(3)=24\Rightarrow a=2$

$\Rightarrow f(x)=2(x+1)^3-9(x+1)^2+k$　令 $g(t)=2t^3-9t^2+k$, $t=x+1$

$\sum_{t=2}^{6}g(t)=-55\Rightarrow 2\left(\left(\frac{6\cdot 7}{2}\right)^2-1\right)-9\left(\frac{6\cdot 7\cdot 13}{6}-1\right)+5k=-55\Rightarrow k=-25$

14. 有一數列$\langle a_n\rangle$定義為：$a_1=1$且
$$\begin{cases} a_n=a_{\frac{n}{2}}+1, & \text{當 } n=2,4,6,8,\cdots \\ a_n=\frac{1}{a_{n-1}}, & \text{當 } n=3,5,7,9,\cdots \end{cases}$$
若$(a_m,a_n)=\left(8,\frac{19}{7}\right)$，則$m-n$的值為_____。

20

14 $8=7+1=6+1+1=\cdots=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{7\text{次}}$

$\Rightarrow m=2^7=128$

$\frac{19}{7}=\frac{5}{7}+1+1=\frac{1}{\frac{2}{5}+1}+1+1=\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}+1}+1}+1+1$

$\Rightarrow n=\left((3\cdot 2\cdot 2)+1\right)\cdot 2+1)\cdot 2\cdot 2=108$

$\Rightarrow m-n=20$

$\frac{1}{2}=a_3$

2	-9	+0	-25
	+0	+5	+25
2	+1	+5	0

$D<0$

$\int_1^5|g(t)|\,dt=\left|\frac{1}{2}t^4-3t^3-25t\Big|_1^5\right|$

$=|32-472|=160$

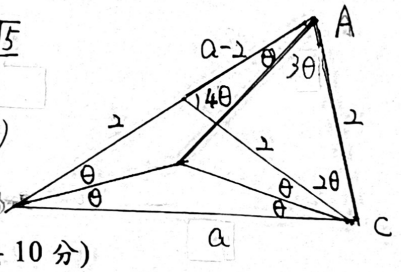
15 在ΔABC中，$\overline{CD}$是$\angle C$的內角平分線，D在$\overline{AB}$上。若$\overline{BD}=2$且ΔABC的外心與ΔBCD的內心重合，則$\overline{AB}=$_____。

$\sqrt{5}+1$

$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

因長比 $\phi:1$ 銳角黃金$\triangle(36^\circ-72^\circ-72^\circ)$

$1:\phi$ 鈍角 $\sim(108^\circ-36^\circ-36^\circ)$



$\frac{a}{2}=\frac{2}{a-2}$ (or $\angle A=2\angle B$ $\Leftrightarrow a^2=b(b+c)$)

$\Rightarrow a^2-2a-4=0$

$\Rightarrow a=1+\sqrt{5}$

二、證明題：(每一小題各 5 分，共 10 分)

已知隨機變數$X\sim G(p)$，請證明：(1) $E(X)=\frac{1}{p}$。(2) $Var(X)=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)$。

Created with Scanner Pro