國立羅東高中 115 學年度第一次教師甄選初試數學科題目卷

一、填充題 (共 16 題，每題 5 分，合計 80 分) 2026.10.31(日)～11.6(五) Ru

1. 設 $a, b, c \in \mathbb{R}$，且 $abc=1$, $ab+bc+ca-3abc=0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$, $c\neq 1$，求 $\dfrac{1}{1-bc}+\dfrac{1}{1-ca}+\dfrac{1}{1-ab}$ 之值。

1 [1] $f(x)=x^3-(a+b+c)x^2+3x-1=(x-a)(x-b)(x-c)$

$\sum_{cyc}\frac{a-1+1}{a-1}=3-\frac{f'(1)}{f(1)}=3-\frac{6-2(a+b+c)}{3-(a+b+c)}=1$

2. 求 101^{15} 的百萬位的數字。

6 [2] $(1+100)^{15}=1+1500+105\overline{0000}+455\overline{000000}\Rightarrow 1+5=6$

[3] 設 $f(x)=ax^{n-1}(x-k)=a(x^n-kx^{n-1})$

明 $A=\int_0^k|f(x)|dx=\frac{|a|\,|\alpha-\beta|^{n+1}}{n(n+1)}$ $k=\alpha-\beta$

3. 求曲線 $y=x^3-4x$ 和其上一點 $P(1,-3)$ 處之切線所圍成之區域面積。

$\frac{27}{4}$ [3] $T-L=x^3+0x^2+cx+d=(x-1)^2(x-\beta)$ $1+1+\beta=0$ $\Rightarrow\beta=-2$ $\frac{1}{4\cdot 3}(\alpha-\beta)^4=\frac{27}{4}$

4. 雙曲線 Γ 之兩焦點為 $F_1(0,0)$, $F_2(2,2)$，已知 $P\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 為雙曲線 Γ 上一點，求雙曲線 Γ 的方程式。

[4] $2C=2\sqrt{2}$ $2a=\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=3-1=2\Rightarrow a=b=1$，中心 $(1,1)$

$2xy-2x-2y+1=0$ $(x-1)(y-1)=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow 2xy-2x-2y+1=0$

5. 數列 $\langle a_n\rangle$ 為等差數列，$a_n=\log b_n$, $n=1,2,3,\cdots$。已知 $a_6=27$, $a_{10}=47$，求 $b_1b_2\cdots b_{10}$ 之值。

10^{245} [5] $27=a_1+5\cdot 5$, $10^{(2+47)\cdot 5}=10^{245}$

6. 求函數 $f(x)=(x-2)^3+3(x-2)^2-2(x-2)-6$ 在 $x=-2$ 的一次近似。

$y=22x+30$ [6] 令 $u=x-2$, $x+2=u+4$, $g(u)=u^3+3u^2-2u-6$, $g'(u)=3u^2+6u-2$ $\Rightarrow g'(-4)=22$

$1+3-2-6\,|\,-4$, $-4+4-8$, $1-1+2-14$

7. 曲線 $y=x^2-x+\dfrac{1}{4}$ 和直線 $y=a$, $a\neq 1$ 相交於 P, Q 兩點，設 $P(x_1,a)$, $Q(x_2,a)$, $x_1>x_2$，求 $\log_a\left|x_1^2-\frac{1}{4}\right|-\log_a\left|x_1+\frac{1}{2}\right|+2\log_a\left|x_2-\frac{1}{2}\right|$ 之值。

$y=22(x+2)-14=22x+30$

$\frac{3}{2}$ [7] $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=a\Rightarrow x_1-\frac{1}{2}=\sqrt{a}$, $\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2=a\Rightarrow\log_a\sqrt{a}\cdot a=\frac{3}{2}$

8. 投擲均勻的骰子四次，出現的點數依次為 n_1, n_2, n_3, n_4，在坐標平面上若 $A(n_1,n_2)$, $B(n_3,n_4)$，求 $A\neq B$ 但 $\overline{AB}$ 和直線 $y=x$ 有共同點的機率。

$\frac{35}{54}$ [8] 15 / 15 L

$n(A\in L\cup B\in L)+15\times 15\times 2$

$6\times 35+6\times 35-6\times 5$

450 + 390 $\rightarrow\frac{840}{6\cdot 6\cdot 6}=\frac{35}{54}$

Created with Scanner Pro