臺南市立沙崙國際高級中學高中部 115 學年度第 1 次教師甄選數學科試題卷

2026.10.25(日) ~ 10.28(三) Ru

一、填充題(60%)

1. 已知$|\log x| = ax+b$的三個實根成等比且公比為 2，試求10^b的值

$\sqrt[4]{8}/2$

2. 如下圖，在3×3方格中，隨機塗上紅色、黃色及綠色，且每種顏色各占3格，試求出現「賓果」(即某一橫列、直行或對角線的顏色完全相同)的機率。

$\frac{19}{70}$

3. 設實數x、y滿足$x^2+y^2=4$，試求x^3+y^3-3xy的最大值。

$5\sqrt{5}-1$

4. 設複數z滿足$z^{10}=1$且$z\neq 1$，試求$\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{1-z^k}$

$\frac{9}{2}$

5. 設n為正整數，若x^n除以$(x-2)(x-3)(x-4)$的餘式為$R(x)$，試求$\lim_{n\to\infty}\frac{R(-1)}{R(0)}$。

2

6. 設實係數多項式函數$f(x)=ax^2+(2-a)$，其中$-1\le a\le 2$。在坐標平面上，令Γ為$y=f(x)$與x軸在$-1\le x\le 1$所圍的區域。又令V為Γ繞x軸旋轉所得旋轉體的體積。試求體積V的最大值。

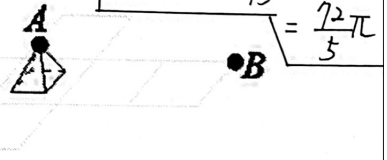
$\frac{72\pi}{5}$

7. $<a_n>$滿足$\begin{cases} a_1=2, & a_2=8 \\ \square, & \\ n>1, & \sqrt{a_n}=\frac{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_{n+1}}}{2} \end{cases}$，則$a_{300}=$

180000

8. 右圖為一邊長 8 的正立方體包裝盒展開圖，在盒底正中央擺上底面正方形邊長為 6，側面腰長為$3\sqrt{6}$的四角錐，試問包裝後正四角錐頂點A與正立方體頂點B的距離=_____。

6



9. 台南沙崙智慧綠能科學城正在舉辦「智慧自駕車迷宮挑戰賽」，目的是推廣人工智慧與智慧交通的科教應用。小安設計的自駕小車 Tesala（特沙拉） 參賽，並安裝了左、右兩個距離感測器，決策邏輯如下：

(1)當只有正前方有障礙物時，Tesala 會隨機選擇向左轉（L）或向右轉（R），且機率各為 50%。

(2)統計資料顯示，在沙崙智慧綠能科學城的模擬迷宮中，Tesala 遇到障礙物的情況(事件 O)佔總行駛時間的 30%。

Created with Scanner Pro

(3)在遇到障礙物的情況下，約有 25% 的機率是左側同時也有障礙物（事件 A）的棘手狀況。

(4)另外，在未遇到障礙物的情況下，仍有約 0.4% 的機率因感測器誤判或環境干擾而顯示「左側有障礙物」。

問題： 若某次比賽中，Tesala 突然進行了左轉避障。請填寫在「左側有障礙物」的條件下，Tesala「遇到障礙物」的機率為 _____(四捨五入到小數第 3 位)。

0.964

$0.3\ O - \frac{250}{1000} \to A$

$0.7\ O' - \frac{4}{1000} \to A$

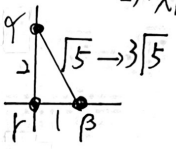
$\frac{3\cdot 250}{3250+28} = \frac{750}{778} \doteq 0.964$

9

10. 二數列$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$具有$a_1=1$、$b_1=1$，且$\forall n\in N$，$\begin{cases} a_{n+1}=a_n-2b_n \\ b_{n+1}=a_n+4b_n \end{cases}$，求$a_n+b_n=$ 2^n

10 令$x_n=a_n+b_n$, $r=2=a_1$ $\Rightarrow x_n=2^n$

11. 複數平面上A(α)、B(β)、C(γ)，已知$\begin{cases} |\alpha-\gamma|=6 \\ \alpha^2+4\beta^2+5\gamma^2-2\alpha\gamma-8\beta\gamma=0 \end{cases}$，求$|\alpha-\beta|=$ $3\sqrt{5}$



11 $(\gamma-r)^2+(2(\beta-r))^2=0 \Rightarrow \gamma-r=2(\beta-r)(\pm i)$

12. 空間座標中$\begin{vmatrix} 0 & x & y & -z \\ -x & 0 & 1 & -1 \\ -y & -1 & 0 & 1 \\ z & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=25$的圖形表示二平行平面，則此二平行平面之距離= $\frac{10}{\sqrt{3}}$

12 $M_{12}=\begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ -y & 0 & 1 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix}=-x-y+z$

$M_{13}=\begin{vmatrix} -x & 0 & -1 \\ -y & -1 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix}=x+y-z$

$M_{14}=\begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ -y & -1 & 0 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix}=-x-y+z$

$-xM_{12}+yM_{13}+zM_{14}=(x+y-z)^2=25 \Rightarrow x+y-z=\pm 5 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{3}}$

反对称矩陣 Skew-symmetric matrix

$A^T=-A$

$\det(A)=(a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23})^2$

二、計算證明題(20%)

1. 設隨機變數X的機率分布為幾何分布$G(p)$，試證隨機變數X的期望值$E(X)=\frac{1}{p}$

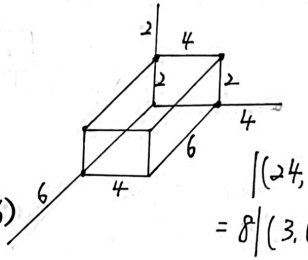
1 $EX=\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p$

$=p\cdot\frac{d}{dq}\sum_{k=0}^{\infty} q^k$

$=p\cdot\frac{d}{dq}(1-q)^{-1}$

$=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$

2. 空間中有一平面$E: 2x+3y-6z-24=0$分別交三軸於A、B、C三點，問原點O與三點所構成之四面體之外接球與內切球半徑的和=



2

$R=\frac{|(4,6,2)|}{2}=\sqrt{14}$

$|(24,48,16)|=8|(3,6,2)|$ (De Gua's thm)

$\frac{4}{3}+2\sqrt{14}$

三、教材教法與課程設計（20%）

前言：從影像到卷積

$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8\cdot 4=\frac{1}{3}(24+48+16+56)r \Rightarrow r=\frac{24}{3+6+2+7}=\frac{4}{3}$

Created with Scanner Pro