10.空間中一直線在 $x+y+z=1$ 上的正射影為 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y=1 \end{cases}$，在 $z=0$ 上的正射影為 $\begin{cases} z=0 \\ x+2y+z=3 \end{cases}$，求此直線的參數式為

$E_1$ $E_1'$ $E_2$ $E_2'$

$\begin{cases} x=-1+4t \\ y=2-2t \\ z=t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

10 $(E_1+kE_1')\perp E_1$ $\xrightarrow{-2}$ $(tE_2+E_2')\perp E_2 \Rightarrow (1,2,t+1)\perp(0,0,1)\Rightarrow t=-1$

(平面族) $\Rightarrow (k+1,k+1,1)//(1,1,0)\perp(1,1,1)$ $L:\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x+2y+0z=3 \end{cases}$ $\begin{matrix}1&1&-2&1&1\\1&2&0&1&2\end{matrix}\begin{matrix}2\\0\end{matrix}$ $\vec{v}=(4,-2,1)$

過 $(-1,2,0)$

11.解聯立方程式 $\begin{cases} \log_5 x-2y=1 \\ x-5^y=6 \end{cases}$ 得到 $x=$ ＿＿。

$\frac{36}{5}$ 11 $x=5^{2y+1}$ $\Rightarrow 5\cdot 5^{2y}-5^y-6=0$ $\Rightarrow x=\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot 5=\frac{36}{5}$

$\begin{matrix}5&-6\\1&+1\end{matrix}$ $\Rightarrow 5^y=\frac{6}{5}$

12.設 $x,y\in\mathbb{R}$，若 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-16x+64}+\sqrt{x^2+y^2-20x-8y+116}+\sqrt{x^2+y^2-8x-12y+52}$ 的最小值為＿＿。

$2\sqrt{13}+2\sqrt{29}$

12 $(0,0)$ $(4,6)$ $(x,y)$ $(10,4)$ $(8,0)$

$=\sqrt{116}+\sqrt{52}$

$=2\sqrt{13}+2\sqrt{29}$

13.全校一家為宜蘭高中的校訓，今天將「全、校、一、家、讚」五字重新排列，使原本相鄰的變成不可相鄰，其中「全、家」兩字相鄰的排法有＿＿種。

10

13 ABCDE

CA D B E AC CA $\to 3$ $\quad$ B D AC E $\quad$ D E B

V E B D V $\to 3$ $\quad$ B E CA D $\quad$ E D B

$\times 2$ $\times 2$ $\Rightarrow 10$

14.老師欲從 阿東、阿西、阿南、阿北 四位同學中選一位當值日生，此四人討論之後以「黑白猜」和「剪刀、石頭、布」來決定由誰當值日生，方式如下：

(1) 首先使用「黑白猜」：直到恰有一人出的手掌方向與其他三人不同，則此人就不必當值日生。

(2) 接著使用「剪刀、石頭、布」：三人出拳比輸贏，直到三人中恰有一人輸時，該位同學就是值日生。

依照上述的規則，則此四人為了決定當值日生人選的猜拳次數期望值為＿＿。

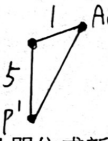
5

14 $P_1=\frac{2\cdot C_1^4}{2^4}=\frac{1}{2}$，$P_2=\frac{3\cdot C_1^3}{3^3}=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow \frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}=5$

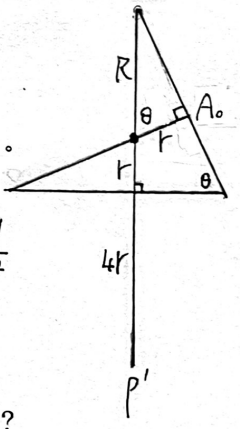
15.已知正四面體 $PABC$ 的邊長為 $\sqrt{2}$，頂點 $P$ 對平面 $ABC$ 的對稱點 $P'$，頂點 $A$ 對平面 $PBC$ 的投影點 $A_0$，則長度 $\overline{P'A_0}=$ ＿＿。

$\frac{\sqrt{22}}{3}$

15 $\cos\theta=\frac{r}{R}=\frac{1}{3}$




$2^2+1^2+2\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{88}{9}$ $\Rightarrow \frac{2\sqrt{22}}{\sqrt{13}}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{22}}{3}$




16.今將函數 $\Gamma: y=x^3+x$ 向上平移 $k$ 單位成新函數 $\Gamma_1$。若 $\Gamma$ 與 $\Gamma_1$ 之公切線斜率大於 $\frac{7}{4}$，則 $k$ 的範圍為＿＿。

$k>\frac{1}{2}$, $k<-\frac{1}{2}$

16 $P(t,t^3+t)$ $Q(s,s^3+s+k)$ $m=3t^2+1=3s^2+1>\frac{7}{4}\Rightarrow t>\frac{1}{2}$ or $t<-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow t=s$(不合) $m=3t^2+1=\frac{2t^3+2t-k}{2t}$ $\Rightarrow k=-4t^3$ $\Rightarrow k>\frac{1}{2}$ or $k<-\frac{1}{2}$

or $s=-t$, $Q(-t,-t^3-t+k)$

**第二部份：計算證明題（共 2 題，每題 10 分，占 20 分）**

**＊請詳細寫出計算過程**

17. 設 $a,b$ 為兩個大於 2 的數，則 (1) $\frac{b^2}{a-2}+\frac{a^2}{b-2}$ 的最小值為何？ (2) 承(1)，此時 $(a,b)$ 為何？

16, (4,4)

17 $\left(\frac{b^2}{a-2}+\frac{a^2}{b-2}\right)(a-2+b-2)\geq(a+b)^2$ 令 $t=a+b$，$\frac{t^2-16+16}{t-4}=t-4+\frac{16}{t-4}+8\geq 16$

"=" 成立 $\Leftrightarrow t-4=4$ $\frac{b}{a-2}=\frac{a}{b-2}\Rightarrow(a+b-2)(a-b)=6(a-b)=0$

$\Rightarrow a=b=4$

18. 若 $n$ 為自然數，$f(n)=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{(2k-1)(2k)}$，則 $\lim_{n\to\infty} f(n)=$ ＿＿。

$\ln 2$

18 $\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\frac{1}{4n-1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\frac{1}{4n}\right)$

$=\sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=2n+1}^{4n}\frac{1}{k}\to\int_2^4\frac{1}{x}dx=\ln 4-\ln 2=\ln 2$

Created with Scanner Pro