2026.10.9(五)
~10.18(日) Ru

115 學年度國立鳳山高級中學教師甄選初試筆試試題【數學科】

答題：請依題序作答，切勿跳題回答

一、 填充題，每題 6 分，共 72 分

1. 若 m，n 為正數，且 $m^3+8n^3+18mn=27$，試求：m^3n 的最大值為_____。

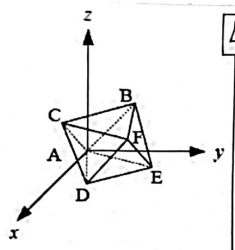
$\frac{2187}{512}$

2. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$a,b,c,d\in\{0,1,-1,-2\}$，求 A^{-1} 不存在的機率為_____。

$\frac{33}{128}$ (98 家商)

3. 正八面體 $ABCDEF$ 的邊長為 2，如圖，已知 A 為原點，A,D,E 為 xy 平面上的點，B 為 yz 平面上的點，則點 B 到 y 軸的距離=

$\frac{\sqrt{6}}{3}$

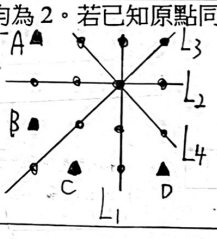


4. 設橢圓曲線 $\Gamma:\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ 與直線 $L:x=12$，若 A_0，F 的坐標分別為 $(6,0)$、$(3,0)$，在曲線 Γ 上另有 11 個點 A_k，$k=1,2,3,\cdots,11$，使得 $\angle A_0FA_1=\angle A_1FA_2=\cdots=\angle A_{11}FA_0$，令 d_k 為 A_k 到 L 的距離，試求 $\sum_{k=0}^{11}\frac{1}{d_k}=$

$\frac{4}{3}$

5. 空間中若有一直線 $L:\frac{x-5}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-4}{-2}$ 同時與兩平面 E_1 及 E_2 平行，且到兩平面距離均為 2。若已知原點同時通過 E_1 及 E_2，試求兩平面夾角的正弦值_____。

$\frac{\sqrt{15}}{49}$



6. 試求所有定義在 $\{x\in R\mid x\neq\pm1\}$ 上的函數 $f(x)$，使其滿足 $f(x)+2f(\frac{x-3}{x+1})=x$，$f(x)=$

$\frac{x^3-6x^2-9x-18}{9(x^2-1)}$

7. 有一款手遊不定期推出促銷抽獎活動，其遊戲公司宣稱玩家抽中大獎的機率是 10%。設隨機變數 X 為連續抽獎直到抽中大獎才停止所需的抽獎次數，請以顯著水準 $\alpha=0.1$ 計算抽獎次數 X 的拒絕域為

$\{X\geq23\}$

8. 若已知 $x-y=60°$，$\cos^2x+\cos^2y$ 的最大值為 M，最小值為 m，試求實數數對 $(M,m)=$

$(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

9. 設 a 為實數，若方程式 $x^2-(3a+1)x-2a+2=0$ 有虛根 z，且 z^3 為實數，則 a 值為

$a=-1$ or $\frac{1}{9}$

10. 給定座標平面上三點 $A(2,4),B(8,13),C(1,1)$，若動點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=|\overrightarrow{CP}|^2$，則 $|2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$ 的最小值為_____。

$\frac{213}{17}$

11. 若 $\vec{a}$ 在 $\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ 上的正射影分別為 $(1,2,2),(2,3,6),(3,1,4)$，則 $\vec{a}=$_____。

$(-7,-5,13)$

12. 給定一多項式函數 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x+1$，則 $\sum_{k=1}^{2026}f\left(\frac{k}{2026}\right)=$

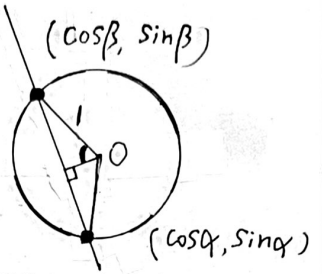
$\frac{10127}{8}$

Created with Scanner Pro

二、 計算證明題，共 28 分

1. 設 α,β 是方程式 $a\cos x+b\sin x-c=0$，$(a^2+b^2\neq 0)$ 的相異兩根，且 $\alpha-\beta\neq k\pi,(k\in Z)$，

求證：$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$。(8 分)



[1] $L: ax+by-c=0$

$\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{d(O,L)}{1}\right)^2=\frac{c^2}{a^2+b^2}$

2. 試以兩種方法解下列這道題目，並說明你在上課時會傾向於使用哪一種方法向學生說明，為什麼？

題目：已知拋物線的焦點為 $(2,-1)$，對稱軸平行 y 軸，且通過點 $(-1,3)$，則此拋物線的方程式為何？(10 分)

$(x-2)^2=2\left(y+\frac{3}{2}\right)$ or $(x-2)^2=-18\left(y-\frac{7}{2}\right)$

3. 設 a,b,c 為實數，已知 b,c 是關於 x 的方程式 $x^2+(a-2)x+a^2-a-2=0$ 的兩根，試回答下列問題：

$[-2,2]$ (1) a 值的範圍；(4 分)

[3] $\Delta\geq 0 \Rightarrow 3a^2\leq 12 \Rightarrow -2\leq a\leq 2$

15 (2) $(a+1)^3+b^3+c^3$ 的最小值。(6 分)

$b+c=-(a-2)$，$bc=a^2-a-2$

$-(a-2)^3+3(a-2)(a^2-a-2)=(a-2)(2a^2+a-10)$

$2+1-10$

$-4-2+20$

$+)\ 1+3+3+1$

$\Rightarrow f(a)=3a^3-9a+21$，$f'(a)=9a^2-9=0$

$\Rightarrow min=f(1)=15$

[2] 法1：設 $V(2,-1-c)$

$\Gamma:(x-2)^2=4c(y+1+c)$

$9=4c(c+4)$

$4c^2+16c-9=0$

$2\quad +9$

$2\quad -1$

$c=\frac{1}{2}:(x-2)^2=2\left(y+\frac{3}{2}\right)$

$c=\frac{-9}{2}:(x-2)^2=-18\left(y-\frac{7}{2}\right)$

法2：$L:y=-1-2c$，$P(-1,3)$

$5=\overline{PF}=d(P,L)=|2c+4|$

$\Rightarrow$ ~

Created with Scanner Pro