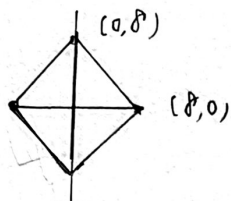


9. 在 xy 平面上，點集合 $F = \{(x, y) \mid |2x + y| + |x - 3y| \leq 8\}$ 所形成的區域面積

$\frac{128}{7}$ 為 _____。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$A' = 7 \cdot A$$



$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16}{7} = \frac{128}{7}$$

10. 設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sin^n \theta - 5\cos^n \theta}{3\sin^n \theta + 7\cos^n \theta}$ 所有可能的值為 _____。

$$\frac{-5}{7}, \frac{-1}{10}, \frac{4}{3}$$

$\boxed{10}$

$$S > C$$

$$S = C$$

$$S < C$$

$$\frac{4}{3}$$

$$\frac{-1}{10}$$

$$\frac{-5}{7}$$

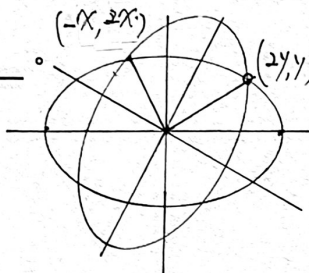
11. 平面上一橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，將 Γ 繞原點逆時針旋轉 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) 後得到橢圓 Γ_1 ，其中

$\cos \theta = \frac{3}{5}$ ，若 Γ_1 與 Γ 交四點，則此四點逆時針依序連接成的四邊形面積

為 _____。

$$\frac{18\sqrt{10}}{5}$$

$\boxed{11}$



$$\frac{4}{3} = \frac{2t}{1-t^2} \Rightarrow 2t^2 + 3t - 3 = 0, \quad \frac{2-1}{1+2}$$

$$4 \cdot 4y^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow y = \frac{6}{5}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5} \sqrt{5} \cdot \frac{6}{\sqrt{10}} \sqrt{5}$$

$$4x^2 + 36x^2 = 36 \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{18\sqrt{10}}{5}$$

12. 試求 $\int_0^1 \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)} dx =$ _____。

$$\frac{\pi + 2\ln 2}{4}$$

$\boxed{12}$

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3} dx$$

$$+ \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$2x^2 + 2x + 4 + (x^2 + x) = \text{分子}$$

$$= \left(\tan^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

13. 若 $a, b \in \mathbb{R}$ 且滿足以下兩條件：① $a + b \in \mathbb{Z}$ ；② $\frac{a+b}{a^2 + ab + b^2} = \frac{3}{32}$ ，則 $a + b$ 最大可能的值

$\frac{14}{9}$ 為 _____。

$$\boxed{13} \text{ 法: } \begin{cases} k = a + b, b = k - a \end{cases} \text{ or } \begin{cases} 32k = 3(k^2 - ab) \end{cases}$$

$$\text{法2: } \begin{cases} k = a + b, a = kx \\ b = ky \end{cases}$$

$$(\text{其實同左式}) \quad | = (x+y)^2 - 4xy$$

$$\Rightarrow 32k = 3(x^2 + x(k-x) + (k-x)^2) \quad k^2 = (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 3kx + 3k^2 - 32k = 0$$

$$\Rightarrow 3ab = 3k^2 - 32k \leq \frac{3}{4}k^2$$

$$D \geq 0 \Rightarrow 3k^2 \geq 4(3k^2 - 32k)$$

$$\frac{3}{32} = \frac{1}{k((x+y)^2 - 4xy)} \leq \frac{1}{\frac{3}{4}k}$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{128}{9} = 14. \sim$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{128}{9} = 14. \sim \Rightarrow \frac{14}{9}$$

14. 等腰梯形 $ABCD$ 中， M 、 N 分別為兩腰 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 中點，若已知對角線 $\overline{AC}=7$ ，且

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MN} = 13$ ，則等腰梯形 $ABCD$ 的面積為

$6\sqrt{13}$ 14

$|\overrightarrow{MN}|^2 = 13$
 $\Rightarrow 6\sqrt{13}$

$\overline{AD} = m$
 $\overline{MN} = \frac{m+n}{2}$

15. 若方程式 $x^4 + 2\sqrt{3}(\log_3 k)x^2 + 2 - (\log_3 k)^2 = 0$ 有四個相異實根，則實數 k 的範圍

為 15

$y^2 + (\sqrt{3}t)y + 2 - t^2 = 0$

$\sqrt{-2} < k < \sqrt{2}$

$y_1 = x^2 > 0$
 $y_2 = x^2 > 0$
 $x = \pm\sqrt{y_1}, \pm\sqrt{y_2}$

$\begin{cases} D > 0 \\ y_1 + y_2 > 0 \\ y_1 y_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ or } t < -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ t < 0 \\ -\sqrt{2} < t < \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < \log_3 k < -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{-2} < k < \sqrt{2} \end{cases}$

16. 現有一堆數量為 n 的白色圍棋棋子，重複以下步驟至分成 n 堆數量為1的棋子：

65 (1) 將數量不是1的棋子分成兩堆；

(2) 求剛分成兩堆棋子數量的乘積。

最後求所有乘積的總和為 k 。

例如：有一堆數量為4的棋子，先分成2,2兩堆，得乘積4；再將其中一堆分成1,1兩堆，得乘積1；再將最後一堆數量為2的分成1,1兩堆，得乘積1。所有乘積的總和為 $4 + 1 + 1 = 6$ 。

若 $k > 2026$ ，則 n 最小值為

16

$n < n-1 < n-2 < n-3 \dots$

$n-1 + n-2 + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} > 2026 \Rightarrow n = 64$

二、計算證明題：(每題10分，共20分，須詳列計算過程或說明理由。)

1. 求數列 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + n, n \geq 2 \end{cases}$ 的一般項 $a_n = 2^{n-1} - n - 2$ 。(答案以 n 表示)

1 $a_n + 2^n + \beta = 2(a_{n-1} + 2^{n-1} + \beta) \Rightarrow a_n = 2^{n-1} - n - 2$

$\Rightarrow 2^n - 2^n + \beta = n \Rightarrow \beta = 2$

2. 若複數 α 、 β 、 γ 滿足 $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ ，試證明 $\frac{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)}{\alpha\beta\gamma}$ 為實數。

2 法1: $\alpha + \beta = e^{iA} + e^{iB}$

$= e^{i(\frac{A+B}{2})} (e^{i(\frac{A-B}{2})} + e^{i(\frac{B-A}{2})})$

$= e^{i(\frac{A+B}{2})} \cdot 2 \cos(\frac{A-B}{2})$

$\left(\prod_{cyc} e^{i(\frac{A+B}{2})} \cdot 2 \cos(\frac{A-B}{2}) \right) / e^{i(A+B+C)}$

$= 8 \cos(\frac{A-B}{2}) \cos(\frac{B-C}{2}) \cos(\frac{C-A}{2}) \in \mathbb{R}$

法2: 令原式 $= Z$, $\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = \gamma\bar{\gamma} = 1$

$\Rightarrow \bar{Z} = \frac{(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha})}{\frac{1}{\alpha\beta\gamma}}$

$= \frac{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)}{\alpha\beta\gamma} = Z \Rightarrow Z \in \mathbb{R}$

第4頁/共4頁