

8. 設 x 為實數，若 α 、 β 為方程式 $a^{-2x} + 5x^2 = 1$ 異於 0 的兩根， $a > 0$ 且 $\alpha - \beta = \frac{2}{3}$ ，則 $a =$ _____。

$\frac{27}{8}$ $\boxed{8}$ $9 - (-9) = \frac{2}{3}$ $a^{\frac{-2}{3}} = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8}$
 $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$

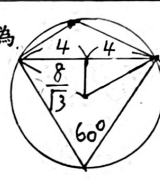
9. 坐標平面上，已知向量 $\vec{v}$ 在向量 $(2, -3)$ 方向的正射影長為 a ，而向量 $\vec{v}$ 在向量 $(3, 2)$ 方向的正射影長為 b 。

若 $\vec{v}$ 與向量 $(2, -3)$ 、向量 $(3, 2)$ 的夾角均為銳角，則向量 $\vec{v}$ 在向量 $(4, 7)$ 方向的正射影長為 _____。

(答案請以 a 、 b 表示)

$\frac{1}{\sqrt{5}} |a+2b|$ $\boxed{9}$ $(2, -3) \perp (3, 2)$ $(4, 7) = \lambda(2, -3) + \gamma(3, 2)$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda' \\ \gamma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \gamma \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
 $| (2, -3) | = | (3, 2) |$ $\begin{cases} 2\lambda + 3\gamma = 4 \\ -3\lambda + 2\gamma = 7 \end{cases} \Rightarrow (\lambda, \gamma) = (-1, 2)$ 旋轉: $(4+7i)(2+3i) = -3+26i$

10. 平面上，二定點 A 、 B ，若 $\overline{AB} = 8$ ，則滿足 $\angle APB \geq 120^\circ$ 之動點 P 所圍成之區域面積為 _____。

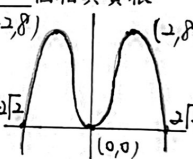
$\frac{28\pi}{9} - \frac{32\sqrt{3}}{3}$ $\boxed{10}$ $2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{64}{3} \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{16}{\sqrt{3}} \right)$ $= \frac{128\pi}{9} - \frac{32}{\sqrt{3}}$  $\Rightarrow (-1, 2)$ $\frac{|(a, b) \cdot (-1, 2)|}{|(-1, 2)|} = \frac{|-a+2b|}{\sqrt{5}}$

11. 設 z 為複數，在複數平面上，一個正六邊形依逆時針方向的連續三個頂點為 z 、 0 、 $z-6+4\sqrt{3}i$ ，

其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 z 的虛部為 _____。

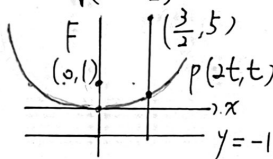
$-3\sqrt{3}$ $\boxed{11}$ $z-6+4\sqrt{3}i$ $z(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = z-6+4\sqrt{3}i$
 $\Rightarrow z = \frac{(6-4\sqrt{3}i)^2}{3+\sqrt{3}i} = \frac{1}{6} (6-4\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i) = -3\sqrt{3}i$

12. 已知多項式 $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^2$ ，則方程式 $f(f(x)) = 0$ 有 _____ 個相異實根。

$\boxed{2}$ $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 2$
 $\Rightarrow 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 2$  $f(0) = 0$ $3\sqrt{7}$
 $f(2) = 2\sqrt{2}$ $4\sqrt{7}$
 $f(-2) = 2\sqrt{2}$ $2\sqrt{7}$

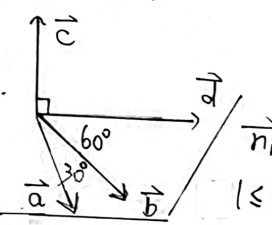
13. 已知 $f(x) = \sqrt{4x^2 + (x^2 - 1)^2} + \sqrt{(2x - \frac{3}{2})^2 + (x^2 - 5)^2}$ ，其中 x 為實數。若當 $x = m$ 時， $f(x)$ 有最小值 k ，

則 $m+k =$ _____。

$\frac{27}{4}$ $\boxed{3}$ $P: x^2 = 4y$  $k = 6 \Rightarrow 6 + \frac{3}{4} = \frac{27}{4}$
 $P(2t, t^2) \in \Gamma$ $2t = \frac{3}{2}$

14. 若空間中有 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$ 四個相異向量，滿足 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ ， $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{d}$ ，且 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$ ，

若已知 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ，則 $|\vec{b} \times \vec{d}| =$ _____。

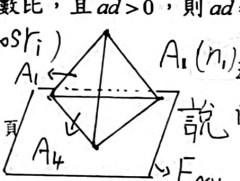
$4\sqrt{3}$ $\boxed{4}$ $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ $|\vec{d}| = |\vec{a}| |\vec{c}| \sin 90^\circ$ $4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$  $\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j = -1$ $1 \leq i, j \leq 3$

15. 若三正數 a, b, c 滿足 $abc(a+b+c) = 25$ ，則 $(a+b)(b+c)$ 的最小值為 _____。

$\boxed{15}$ $ab+ac+b^2+bc = b(a+b+c) + ac \geq 2\sqrt{25} = 10$ $\boxed{16}$ $P(2, 3, -4)$ $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ $\vec{n}_2 = (1, -1, -1)$ $\vec{n}_3 = (-1, 1, 1)$ $h = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot 6\sqrt{2}$
 $= \frac{|d-9|}{\sqrt{3}}$

16. 坐標空間中，四個平面 $E_1: x+y+z=1$ 、 $E_2: x-y-z=3$ 、 $E_3: x-y+z=-5$ 與 $E_4: ax+by+cz=d$ 恰圍出一個

邊長為 $6\sqrt{2}$ 的正四面體，今將 E_4 的所有係數寫成最簡的整數比，且 $ad > 0$ ，則 $ad =$ _____。

$\boxed{16}$ 空間中任意封閉多面體 $\vec{r} = (\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i)$ $A_1(n_1)_z + A_2(n_2)_z + A_3(n_3)_z + A_4(-1) = 0$
 $\sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n A_i \hat{n}_i = \vec{0}$ $\hat{n}_i = ((n_i)_x, (n_i)_y, (n_i)_z)$  $\cos 80^\circ$ $|d-9| = 12 \Rightarrow d = 21$