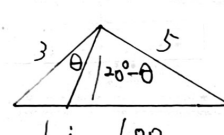


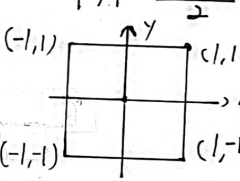
注意：所有答案請化簡為最簡分數或最簡根式，否則不予計分。

填充題答案寫在答案卷第一頁，計算題從答案卷第二頁開始作答，並標示清楚題號。

一、填充題(每題 5 分，共 80 分) 2026.9.3(四) ~ 9.16(三) Ru

1. 若矩陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$, 則 $A \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$
 $2A \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{AC} = 5$ 且 $\angle BAC = 120^\circ$ 。已知 P 為 $\overline{BC}$ 上一點，且 $\overline{BP} : \overline{PC} = 1 : 100$ ，則 $\tan \angle BAP = \frac{\sqrt{3}}{119}$

 $\frac{3}{119} = \frac{3S}{\frac{5}{2}(\sqrt{3}C+S)} = \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{S}{C} = \frac{\sqrt{3}}{119}$

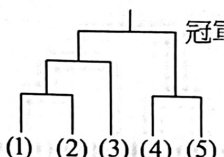
3. 連續投擲一枚不公平硬幣，直到出現正面才停止，令隨機變數 X 的取值為直到出現正面時投擲的總次數，
 已知 $P(X \geq 5) = \frac{16}{81}$ ，則 X 的期望值與 X 的變異數的和為 9 。
 $P(\text{前4次皆反面}) = (1-p)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$
 $P = \frac{1}{3}$
 $E[X + \text{Var } X] = 3 + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = 3 + 6 = 9$
 $|X| = \frac{|u+v|}{2} \leq \frac{|u|+|v|}{2} = 1$
 $|Y| = \frac{|u-v|}{2} \leq \frac{|u|+|v|}{2} = 1$


4. 設 x, y 為實數，滿足 $|x+y| + |x-y| = 2$ ，則 $x^2 + y^2 - 4x + y$ 的最大值為 9 。
 $u = x+y, v = x-y \Rightarrow x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$
 $(\frac{u+v}{2} - 2)^2 + (\frac{u-v}{2} + \frac{1}{2})^2 = \frac{17}{4}$
 $\frac{d}{d(u,v)} = (0, -2) \Rightarrow \max = 9 + \frac{9-17}{4} = 9$

5. 甲、乙、丙、丁 4 人，入座編號 1 號至 12 號的 12 個位子，且任意兩人均不相鄰，且第 6 個位子一定要有人坐，則有 960 種入座方法。
 $(1, 2) (2, 1) (0, 3)$
 $(C_4^1 \cdot C_2^4 + C_2^3 C_1^5 + C_3^3) 4! = 960$

6. 已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ ，則 $a_{100} = \frac{100!}{2}$ 。(答案不需要乘開)
 $a_{n-1} = a_1 + \dots + (n-2)a_{n-2}, n \geq 3$
 $a_3 = 3a_2 \Rightarrow a_n = \frac{n!}{2}$
 $a_4 = 4a_3$
 $a_n = n a_{n-1} \Rightarrow a_{100} = \frac{100!}{2}$

7. 熱門手遊舉辦一場 5 位玩家：甲、乙、丙、丁、戊的單淘汰表演賽，賽程如下，圖中(1)~(5)位置由電腦隨機分配。已知甲玩家擁有神裝，在與任何玩家對陣時，勝率皆穩定為 $\frac{2}{3}$ ，其餘四位玩家，戰力相當，彼此對陣時，勝率皆為 $\frac{1}{2}$ 。若系統隨機產生對戰表後，則冠軍賽是由甲、乙兩位玩家對戰的的機率為 $\frac{13}{90}$ 。

$P(\text{甲左, 乙右}) = C_2^3 / C_3^5 = \frac{3}{10}$
 $P(\text{乙左, 甲右}) = \frac{3}{10}$
 $P_{\text{甲win}} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{14}{27}$
 $P_{\text{乙win}} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}$
 $P_{\text{甲win}} = \frac{2}{3}$
 $\frac{3}{10} \cdot \frac{14}{27} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7+6}{90} = \frac{13}{90}$


二、計算題(共 30 分) $\square^{(1)}$ $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, $n \geq 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$

1. 已知 $\langle a_n \rangle$ 為無窮數列，試判斷下列各命題的真偽，需說明詳細理由。(2) Harmonic Series (調和級數)

T (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。(5 分)

$$a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

F (2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。(5 分)

$$\text{法 2: } (x^2 + y^2)(z^2 + 1^2) \geq (3xy)^2 \Rightarrow [-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$$

$\square$ 切比雪夫不等式 $\Rightarrow \begin{cases} 3xy = \pm 2\sqrt{10} \\ x = y \Rightarrow \pm \left(\frac{2\sqrt{10}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{3}\right) \end{cases}$ $\text{法 3: } P(2C, 2S), 2(3C+S) = 2\sqrt{10} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot C + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot S\right)$

2. 分別以 108 課綱 高一、高二、高三 數學的內容解下列題目：

$\text{法 4: } L_1: 3x+y=k, d(L_1, L_2) = 2r \Rightarrow \dots$
 $L_2: 3x+y=-k$

已知 $x^2 + y^2 = 4$ ，其中 x, y 為實數，則：

當 $(x, y) = \left(\frac{6}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ 時， $3x+y$ 有最大值為 $2\sqrt{10}$ 。

當 $(x, y) = \left(-\frac{6}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ 時， $3x+y$ 有最小值為 $-2\sqrt{10}$ 。

$\text{法 5: } 2x+2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} = \frac{-3}{1}$
 $\Rightarrow x = 3y \Rightarrow \sim$

(寫出一種方法得 4 分，寫出二種方法得 7 分，寫出三種方法得 10 分)

3. 心心在數學實驗班專題課微積分就是轉機學到了 $(\sin x)' = \cos x$ ，她回家練習時想要依照老師課堂教學的做法來推導餘弦函數的微分，以下是心心的做法：

$$\begin{aligned} \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{ 由導函數的定義} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x + h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{h} &\rightarrow \frac{\pi}{2} - (x+h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos h + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin h - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(\cos h - 1) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \frac{\cos h - 1}{h} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \frac{\sin h}{h} \right] \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times 0 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times 1 \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x - h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{h} \\ &= \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{h}{2}\right)\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} -\sin x \end{aligned}$$

請問心心的做法正確嗎？若錯誤的話請指出錯誤的地方，並且修正她的做法幫她完成練習。(10 分)