

看成2个0 $\Rightarrow$ 2-正则图 (2-regular graph)

8. 在 5×5 的方格棋盤共 25 個格子中, 要求每一行和每一列都恰有 3 個格子被塗黑, 則有 _____ 種不同的塗法。結構橫列
- 2040 結構 1
- 結構 2
- 結構 3
- 結構 4
- 結構 5
- 結構 6
- 結構 7
- 結構 8
- 結構 9
- 結構 10
- 結構 11
- 結構 12
- 結構 13
- 結構 14
- 結構 15
- 結構 16
- 結構 17
- 結構 18
- 結構 19
- 結構 20
- 結構 21
- 結構 22
- 結構 23
- 結構 24
- 結構 25
- 結構 26
- 結構 27
- 結構 28
- 結構 29
- 結構 30
- 結構 31
- 結構 32
- 結構 33
- 結構 34
- 結構 35
- 結構 36
- 結構 37
- 結構 38
- 結構 39
- 結構 40
- 結構 41
- 結構 42
- 結構 43
- 結構 44
- 結構 45
- 結構 46
- 結構 47
- 結構 48
- 結構 49
- 結構 50
- 結構 51
- 結構 52
- 結構 53
- 結構 54
- 結構 55
- 結構 56
- 結構 57
- 結構 58
- 結構 59
- 結構 60
- 結構 61
- 結構 62
- 結構 63
- 結構 64
- 結構 65
- 結構 66
- 結構 67
- 結構 68
- 結構 69
- 結構 70
- 結構 71
- 結構 72
- 結構 73
- 結構 74
- 結構 75
- 結構 76
- 結構 77
- 結構 78
- 結構 79
- 結構 80
- 結構 81
- 結構 82
- 結構 83
- 結構 84
- 結構 85
- 結構 86
- 結構 87
- 結構 88
- 結構 89
- 結構 90
- 結構 91
- 結構 92
- 結構 93
- 結構 94
- 結構 95
- 結構 96
- 結構 97
- 結構 98
- 結構 99
- 結構 100
- 結構 101
- 結構 102
- 結構 103
- 結構 104
- 結構 105
- 結構 106
- 結構 107
- 結構 108
- 結構 109
- 結構 110
- 結構 111
- 結構 112
- 結構 113
- 結構 114
- 結構 115
- 結構 116
- 結構 117
- 結構 118
- 結構 119
- 結構 120
- 結構 121
- 結構 122
- 結構 123
- 結構 124
- 結構 125
- 結構 126
- 結構 127
- 結構 128
- 結構 129
- 結構 130
- 結構 131
- 結構 132
- 結構 133
- 結構 134
- 結構 135
- 結構 136
- 結構 137
- 結構 138
- 結構 139
- 結構 140
- 結構 141
- 結構 142
- 結構 143
- 結構 144
- 結構 145
- 結構 146
- 結構 147
- 結構 148
- 結構 149
- 結構 150
- 結構 151
- 結構 152
- 結構 153
- 結構 154
- 結構 155
- 結構 156
- 結構 157
- 結構 158
- 結構 159
- 結構 160
- 結構 161
- 結構 162
- 結構 163
- 結構 164
- 結構 165
- 結構 166
- 結構 167
- 結構 168
- 結構 169
- 結構 170
- 結構 171
- 結構 172
- 結構 173
- 結構 174
- 結構 175
- 結構 176
- 結構 177
- 結構 178
- 結構 179
- 結構 180
- 結構 181
- 結構 182
- 結構 183
- 結構 184
- 結構 185
- 結構 186
- 結構 187
- 結構 188
- 結構 189
- 結構 190
- 結構 191
- 結構 192
- 結構 193
- 結構 194
- 結構 195
- 結構 196
- 結構 197
- 結構 198
- 結構 199
- 結構 200
- 結構 201
- 結構 202
- 結構 203
- 結構 204
- 結構 205
- 結構 206
- 結構 207
- 結構 208
- 結構 209
- 結構 210
- 結構 211
- 結構 212
- 結構 213
- 結構 214
- 結構 215
- 結構 216
- 結構 217
- 結構 218
- 結構 219
- 結構 220
- 結構 221
- 結構 222
- 結構 223
- 結構 224
- 結構 225
- 結構 226
- 結構 227
- 結構 228
- 結構 229
- 結構 230
- 結構 231
- 結構 232
- 結構 233
- 結構 234
- 結構 235
- 結構 236
- 結構 237
- 結構 238
- 結構 239
- 結構 240
- 結構 241
- 結構 242
- 結構 243
- 結構 244
- 結構 245
- 結構 246
- 結構 247
- 結構 248
- 結構 249
- 結構 250
- 結構 251
- 結構 252
- 結構 253
- 結構 254
- 結構 255
- 結構 256
- 結構 257
- 結構 258
- 結構 259
- 結構 260
- 結構 261
- 結構 262
- 結構 263
- 結構 264
- 結構 265
- 結構 266
- 結構 267
- 結構 268
- 結構 269
- 結構 270
- 結構 271
- 結構 272
- 結構 273
- 結構 274
- 結構 275
- 結構 276
- 結構 277
- 結構 278
- 結構 279
- 結構 280
- 結構 281
- 結構 282
- 結構 283
- 結構 284
- 結構 285
- 結構 286
- 結構 287
- 結構 288
- 結構 289
- 結構 290
- 結構 291
- 結構 292
- 結構 293
- 結構 294
- 結構 295
- 結構 296
- 結構 297
- 結構 298
- 結構 299
- 結構 300
- 結構 301
- 結構 302
- 結構 303
- 結構 304
- 結構 305
- 結構 306
- 結構 307
- 結構 308
- 結構 309
- 結構 310
- 結構 311
- 結構 312
- 結構 313
- 結構 314
- 結構 315
- 結構 316
- 結構 317
- 結構 318
- 結構 319
- 結構 320
- 結構 321
- 結構 322
- 結構 323
- 結構 324
- 結構 325
- 結構 326
- 結構 327
- 結構 328
- 結構 329
- 結構 330
- 結構 331
- 結構 332
- 結構 333
- 結構 334
- 結構 335
- 結構 336
- 結構 337
- 結構 338
- 結構 339
- 結構 340
- 結構 341
- 結構 342
- 結構 343
- 結構 344
- 結構 345
- 結構 346
- 結構 347
- 結構 348
- 結構 349
- 結構 350
- 結構 351
- 結構 352
- 結構 353
- 結構 354
- 結構 355
- 結構 356
- 結構 357
- 結構 358
- 結構 359
- 結構 360
- 結構 361
- 結構 362
- 結構 363
- 結構 364
- 結構 365
- 結構 366
- 結構 367
- 結構 368
- 結構 369
- 結構 370
- 結構 371
- 結構 372
- 結構 373
- 結構 374
- 結構 375
- 結構 37

9. 在坐標平面上，以原點 O 為圓心的單位圓上有相異三點 A, B, C 並依此順序逆時針排列， $\angle AOB = \alpha$ ， $\angle BOC = \beta$ ， α, β 皆為正實數。若 $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$ 且平面上恰一點 P 滿足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ ，則 $\cos \alpha$ 的值為 。

$a = \frac{\partial A}{\partial \alpha}$
 $b = \frac{\partial A}{\partial \beta}$
 $c = \frac{\partial A}{\partial \gamma}$
 $p = \frac{\partial A}{\partial p}$

10. 若 k 為整數且 $-5 \leq k \leq 5$ ，將滿足 $|x+2y-5| + |3x+4y-k| \leq 10$ 的所有 (x, y) 畫在坐標平面上會形成一個封閉區域，

2.4 設此封閉區域的面積為 A ，且 $(A-1)$ 是 10 的倍數，則所有滿足題意的整數 k 為

$$\begin{aligned} \boxed{0} \quad & |k > 0: \left(200 - (10 - k)^2 - 25 + \frac{(5-k)^2}{2}\right) \cdot \frac{4}{2} & |k < 0: \left((k+10)^2 - \frac{(k+5)^2}{2}\right) \cdot 2 \\ \boxed{u} \quad & \Rightarrow -k^2 + 30k + 175 - 1 & \Rightarrow k^2 + 30k + 175 - 1 \\ \boxed{v} \quad & & \\ = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \equiv 4 - k^2 \pmod{10} \Rightarrow k \equiv 2 & \equiv k^2 + 4 \pmod{10} \Rightarrow k \equiv -4 \end{aligned}$$

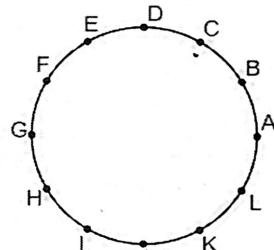
11. 若 p, q 均為質數，且 $p < q$ ，則滿足 $pq \mid (3^p + 3^q)$ 的所有數對 (p, q) 為

$(2,3) \quad \square \quad \text{当 } p=2 \Rightarrow 2 \nmid (1+3^b) \wedge (2,b)=1 \Rightarrow 2 \nmid 2 \quad \text{当 } p=3 \Rightarrow 2 \nmid (1+3^{b-1}) \quad \text{当 } p=5 \Rightarrow 2 \nmid 10 \Rightarrow b=5 \quad \text{当 } p>3$
 $(3,5) \Rightarrow 2 \nmid (1+3^b) \Rightarrow 1+3^b \equiv 1+3 \equiv 4 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow b=3 \Rightarrow 1+3^{b-1} \equiv 1+1 \equiv 2 \equiv 0 \pmod{5}$

12. 如右圖，有一圓桌 A~L 共 12 人圍坐，兩兩握手配對（每人須與自己以外的另一人握手），並滿足下列兩條件：

- 04 (1) 不准交錯握手 (例如: 若 C 跟 E 握手配對, 那 B 跟 D 就不能握手配對)。

(2) A、D、J 三人彼此不握手。
 $\boxed{12}$ 則共有 _____ 種不同的握手配對方式。
 Catalan number $C_n = \frac{1}{n+1} C_n^{2n} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} C_n^{2n} = \frac{1}{n+1} C_n^{2n}$
 $C_6 - (C_1C_4 + C_1C_4 + 0) = \frac{1}{7} C_6^{12} - \left(\frac{1}{2} C_1^2 \cdot \frac{1}{5} C_4^8 \cdot 2\right) = 32 - 28 = 4$



二、計算題（各題配分列於題後，全部 2 大題，共計 28 分）

$(100, 25.030, 6.377, 2.064, 1.970, 2.015, 1.993, 2.004, 1.998, 2.001, 2, \dots)$ 不是遞減数列

1. 對於所有的正整數 n ，數列 $\{a_n\}$ 滿足「 $\sqrt{a_n}, \sqrt{a_{n+1}}, \sqrt{a_{n+1}}$ 是面積為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的等腰三角形三邊長」。請回答下列各小題。

$$\boxed{1} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{a_n} \sqrt{a_{n+1} - \frac{a_n}{4}} \Rightarrow \frac{12}{a_n} = 4a_{n+1} - a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{4} \left(a_n + \frac{12}{a_n} \right) \geq \sqrt{3} \Rightarrow \forall n \geq 2, a_n \geq \sqrt{3} > 0$$

- (1) 證明：數列 $\{a_n\}$ 滿足遞迴關係式 $a_{n+1} = \frac{1}{4} \left(a_n + \frac{12}{a_n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ 。(4分)

(2) 設 $a_1 = 100$ ，則數列 $\{a_n\}$ 是否收斂？請證明之。(10分)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{a_n - 6}{4a_n} \right| = \left| \frac{1}{4} - \frac{3}{2a_n} \right| \leq \left| \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| < \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{令 } r = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 0 < r < 1. \quad (\forall n \geq 2, \dots, \text{令 } r = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4})$$

$$0 \leq |a_n - 2| \leq r^{n-1} |a_1 - 2| = 98 \cdot r^{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - 2| = 0 \text{ by pinching thm} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

2. 若兩實數 α 與 β 滿足方程組 $\begin{cases} \alpha^3 - 9\alpha^2 + 30\alpha + 1990 = 0 \\ \beta^3 - 6\beta^2 + 15\beta - 2040 = 0 \end{cases}$ ，求 $\alpha + \beta$ 的值，並證明之。（14分）

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} \quad f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 1990 \\ g(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 2040 \end{array} \quad \begin{array}{r} -6x^2 + 15x - 2040 = 0 \\ \begin{array}{r} -9 + 30 + 1990 \\ +3 \quad -18 \quad +36 \\ \hline -6 + 12 + 2026 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r} -6 + 15 - 2040 \\ +2 \quad -8 \quad +14 \\ \hline -4 + 7 - 2026 \end{array}$$

$$f'(3) = 3 \cdot 9 - 18 \cdot 3 + 30 = 3 = 3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 15 = g'(2)$$

$$f(\alpha) = (\alpha-3)^3 + 3(\alpha-3) + 2026 = 0, \quad g(\beta) = (\beta-2)^3 + 3(\beta-2) - 2026 = 0$$

$$h(\alpha-3) = -2026, \quad h(\beta-2) = 2026 \Rightarrow h(\alpha-3) = h(-(\beta-2)) \Rightarrow \alpha-3 = -(\beta-2) \Rightarrow \alpha+\beta=5$$

