

臺北市立建國高級中學 115 學年度第 2 次正式教師甄選 數學科題目卷

一、填充題 (每題 6 分, 共計 72 分) 2026. 8. 23 (日) ~ 9. 2 (三) Ru □ 當 $p > 3$, 還不會

1. 若 t 為實數且滿足方程式 $\sqrt{t^4 - 4t^3 + 13t^2 - 6t + 1} + \sqrt{t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 1} = 5t$, 則 t 的值為 _____。

$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{1}$ $|\vec{u}| + |\vec{v}| = |(t^2 - 2t, 3t - 1)| + |(-t^2 - t, t + 1)| \geq |(-3t, 4t)| = 5t$ "成直" $4(t^2 - 2t) = -3(3t - 1) \Rightarrow 4t^2 + t - 3 = 0, \frac{4}{1+1}t = \frac{3}{4}$

2. 空間中有一個六角錐 $O-ABCDEF$, 底面為邊長 $2\sqrt{2}$ 的正六邊形 $ABCDEF$, 線段 $\overline{OA}$ 垂直底面且 $\overline{OA} = \sqrt{7} + 1$, 令

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ 平面 OBF 和平面 OCE 的二面角為 θ , 則 $\sin \theta$ 的值為 _____。(答案請簡化為 $\frac{\sqrt{a}}{b}$ 的型式, 其中 a, b 為正整數)

$\frac{1}{2}$ $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+1} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3}$

3. 實係數多項式 $f(x) = 4x^2 + bx + c$, 且滿足 $f(f(1)) = f(f(2)) = f(f(3)) = d$, 則數組 $(b, c, d) =$ $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{2}, \frac{1}{2} \right)$

4. 在坐標平面上, 橢圓 Γ 的方程式為 $\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$. 設直線 $L_{m,p}$ 是斜率為 m 且通過 P 點的直線, 其中 $m < 0$,

$\frac{5}{4}$ $\frac{1}{24}$ 點 P 為橢圓 Γ 上的點, 設直線 $L_{m,p}$ 與 x 軸、 y 軸所圍成的封閉三角形面積為 $A_{m,p}$, 考慮所有 $m < 0$ 及所有橢圓 Γ 上的

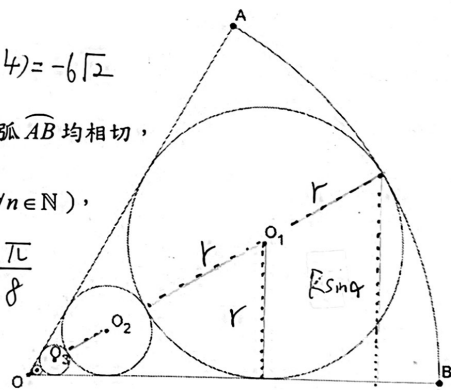
點 P , 則 $A_{m,p}$ 的最小值為 $\frac{1}{2} \left(Ak + \frac{B}{k} \right) \geq \sqrt{AB}$ $2x + 3y = 24 - 6\sqrt{2}$ $\Rightarrow \frac{1}{2} (12 - 3\sqrt{2})(8 - 2\sqrt{2}) = 54 - 24\sqrt{2}$

$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1, y = m\sqrt{A(m^2 + \frac{1}{A})}$ $m^2 = k^2 = \frac{B}{A} = \frac{4}{9}, m = \frac{2}{3}$

5. 如右圖, 扇形 AOB 的圓心角 $\angle AOB = \theta$, $\overline{OA} = 1$, 圓 O_1 與 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 、弧 $\widehat{AB}$ 均相切,

$\frac{\pi}{8}$ 圓 O_{n+1} 與圓 O_n 外切, 並與 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 均相切, 且令圓 O_n 的面積為 a_n ($\forall n \in \mathbb{N}$),

$\frac{1}{5}$ 則極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_1}$ 的值為 $\frac{\pi}{8}$



6. 形如 $\frac{q}{p}$ (其中 $12 \leq p \leq 99$) 的最簡分數中, 最接近 $\frac{3}{11}$ 的最簡分數為 _____。

$\frac{26}{95}$ $\frac{1}{11} - \frac{3}{p} = \frac{p-33}{11p}$ $(11, 3) = 1 \Rightarrow 11p - 33 = 1 \Rightarrow p = 34$ $\Rightarrow p \equiv 12p \equiv -4 \equiv 7 \pmod{11}$ $\Rightarrow p = 12p \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow p = 95, q = 26$

7. 如右圖 (示意圖, 不代表精準圖形), 平面上有一圓內接四邊形 $ABCD$,

$\frac{3}{10}$ 滿足 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{AD} = 5 : 10 : 11$, $\angle ACD = 3\angle ACB$, $\angle ACB < 45^\circ$, $\overline{BC} < \overline{BD} = 48$,

則線段 $\overline{BC}$ 的長度為 $2R = 48 / \frac{2}{5} = 50$ $\Rightarrow 48 = 24C + 48S$

$\frac{1}{7}$ $11 = 5(3 - 4\sin^2 \alpha)$ $\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ $\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$ $\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \angle ABC}{\sin \alpha} = 2 \Rightarrow \sin \angle ABC = \frac{2}{5} = \cos \alpha$, $\angle ABC = 90^\circ + \alpha$, $\beta = 90^\circ - 2\alpha$

