

臺北市立中正高級中學 115 學年度第 1 次專任教師甄選數學科初選試卷

一、填充題 (每題 6 分) $\frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{1}{a_k} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+2}} \right) \Rightarrow \frac{1}{1-6d} - \frac{1}{1-5d} - \frac{1}{1-5d} + \frac{1}{1-6d} = 2 \left(\frac{1}{1-6d} - \frac{1}{1-5d} \right) = 2 \cdot \frac{1}{d^2}$

1. 等差數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_7 = 1$ 且公差 $d > 0$, 若 $\sum_{k=1}^{11} \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = 11$, 則公差 $d = \frac{1}{30}$

2. 函數 $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{5-x}$ ($-1 \leq x \leq 1$) 的最大值為 $\frac{\sqrt{6}}{12}$

3. 集合 $S = \{1, 2, \dots, 8\}$, 令 $T = \{(A, B) | A \subseteq S, B \subseteq S \text{ 且 } A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset\}$, 求 $n(T) = 6050$

4. 已知三次函數 $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x + 1$, 求 $\sum_{k=1}^{200} f\left(\frac{k}{201}\right) = 6050$

5. 計算 $\log_4 \left[(1 + \tan 1^\circ) \times (1 + \tan 2^\circ) \times \dots \times (1 + \tan 44^\circ) \times (1 + \tan 45^\circ) \right] = \frac{23}{2}$

6. 已知 $\triangle ABC$ 三邊長成等差數列, 設公差 $d > 0$. 若 $\triangle ABC$ 外接圓半徑 $R = \frac{8}{15}\sqrt{15}$, 內切圓半徑 $r = \frac{\sqrt{15}}{4}$, 試求公差 $d = \frac{1}{2}$

7. 如右圖, 正八面體 $ABCDEF$ 的邊長為 2. 已知 A 為原點, A, D, E 為 xy 平面上的點, B 為 yz 平面上的點, 則 B 到 y 軸的距離為 $\frac{3}{2}$

8. 計算無窮級數和: $\frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{9}{3^3} + \dots + \frac{n^2}{3^n} + \dots = \frac{10}{3}$

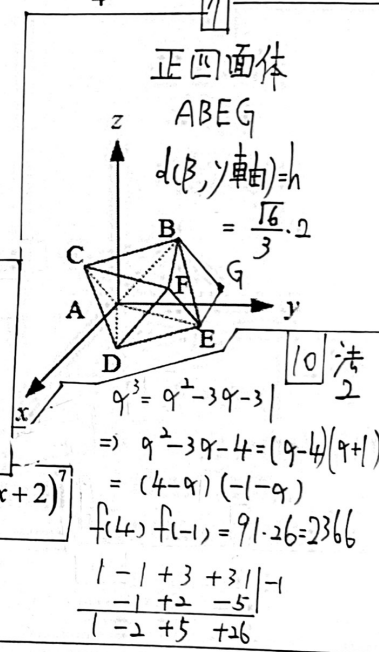
9. 設多項式函數 $F(x) = (x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x + 1)^4 (x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 5x - 2)^3 (x^2 - 2x + 2)^7$, 求其四階導數 $F^{(4)}(1) = 2366$

10. 設方程式 $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 31 = 0$ 的三個根為 α, β, γ , 則 $(\alpha^3 + 27)(\beta^3 + 27)(\gamma^3 + 27) = 2366$

11. $\triangle ABC$ 中, 已知 $A(2, -4)$, 若 $\angle B, \angle C$ 之角平分線方程式分別為 $L_1: x + y - 2 = 0$ 及 $L_2: x - 3y - 6 = 0$, 求 BC 直線之方程式為 $x + y - 6 = 0$

12. 某老師欲安排接下來 4 月 10 日至 19 日 (共 10 天) 安排訓練規劃, 其中有 5 天安排「高強度訓練日」, 另外有 5 天安排「修復日」。為了評估此安排的訓練品質, 定義: 如果某個「高強度訓練日」的前一天與後一天剛好都是「修復日」, 則該日稱為「黃金孤立訓練日」(因為此時運動員能量最飽滿)。

如果隨機在這 10 天中安排 5 天「高強度訓練日」(假設 4 月 9 日與 20 日均為修復日), 試求這 10 天中「黃金孤立訓練日」出現次數的期望值為 $\frac{5}{3}$



二、計算題 (除第 3 題 12 分外，其餘每題 8 分) [1] $1 + \frac{1}{n} = \frac{1 + \dots + 1 + 2}{n} \geq \sqrt[n]{2}$

1. 設 n 為正整數，試證明： $1 + \frac{1}{2n-1} \leq \sqrt{2} \leq 1 + \frac{1}{n}$ 。
 $\frac{2n-1}{2n} = \frac{1 + \dots + 1 + (-\frac{1}{2})}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} \geq \frac{2n}{2n-1} = 1 + \frac{1}{2n-1}$

2. 設 $A(1, 2, -3)$ 、 $B(5, -4, 1)$ ， P 為平面 $E: x - 2y + 3z - 4 = 0$ 上任一點，試求 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 最小值。
 當 $n=1$ 時， $\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{1} = 1$ ， $\sqrt{2} \leq 1 + 1 = 2$ ，成立。

$\frac{242}{7}$ [2] $M(3, -1, -1)$ $2(\overline{MP}^2 + \overline{MA}^2) \leq 2((d(M, E))^2 + \overline{MA}^2) = 2(\frac{2}{7} + 17) = \frac{242}{7}$

3. 將坐標平面上的圖形： $\Gamma: \frac{x^2}{160} + \frac{y^2}{40} = 1$ 以原點為中心逆時針旋轉 45° 後，得到新的圖形 Γ' ，

試回答以下問題：
 [3] $\Gamma \xrightarrow{45^\circ} \Gamma' \Rightarrow (x+iy) = (x'+iy')(-i)$
 $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 320$ $\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y')$ 代入 $x^2 + 4y^2 = 160$

(1) 求出圖形 Γ' 的方程式。(4 分)

$$\Rightarrow 5x'^2 - 6x'y' + 5y'^2 = 320$$

(2) 列出圖形 Γ' 上所有的格子點。(8 分)

$$(2) 5(x-y)^2 + 4xy = 320$$

$$\Rightarrow 5x'^2 - 6x'y' + 5y'^2 = 320$$

$$5 \cdot 64 + 4 \cdot 0 \rightarrow (\pm 8, 0), (0, \pm 8)$$

$$\Rightarrow 5x'^2 - 6x'y' + 5y'^2 = 320$$

$$5 \cdot (\pm 4)^2 + 4(60) \rightarrow (10, 6), (6, 10), (-10, -6), (-6, -10)$$

求 $F_{(1)}^{(4)}$

petero210

兩位

tsusy

大神

提供

[9] $F(x) = (x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x + 1)^4 (x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 5x - 2)^3 (x^2 - 2x + 2)^7$

$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ ，所求 $= a_4 \cdot 4!$ $\frac{1}{2} u = x-1$

$F(x) = G(u) = (u^4 - u^3 - u^2 + u + 1)^4 (u^5 - u^4 - u^3 + u^2 + u - 1)^3 (u^2 + 1)^7$

$(u-1)^3 (u^4 - u^2 + 1)^3 (u^2 + 1)^3 (u^2 + 1)^4$

$= (u^6 - u^5 + u + 1)^4 (u-1)^3 (u^6 + 1)^3$

求 a_4 考慮 $(u+1)^4 (u-1)^3 = (u+1)(u^2-1)^3$

$\Rightarrow C_2^3(-1) \cdot 4! = -72 \#$

$$\begin{array}{r} 1-5+8-4+1 \\ +1-4+4+0 \\ \hline 1-4+4+0+1 \\ +1-3+1 \\ \hline 1-3+1+1 \\ +1-2 \\ \hline 1-2-1 \\ +1 \\ \hline 1-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1-6+13-12+5-2 \\ +1-5+8-4+1 \\ \hline 1-5+8-4+1-1 \\ +1-4+4+0 \\ \hline 1-4+4+0+1 \\ +1-3+1 \\ \hline 1-3+1+1 \\ +1-2 \\ \hline 1-2-1 \\ +1 \\ \hline 1-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1-2+2 \\ +1-1 \\ \hline 1-1+1 \\ +1 \\ \hline 1+0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1-1+1+1-1 \\ +1+0-1+0+1 \\ \hline 1+0-1+0+1+0 \end{array}$$