

臺北市立永春高級中學 115 學年度第一次正式教師甄選數學科試題

※請於答案卷上作答，計算證明題需寫出過程。

一、填充題（每格 7 分，共 70 分）

1. 若級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ 是收斂的，則其和為

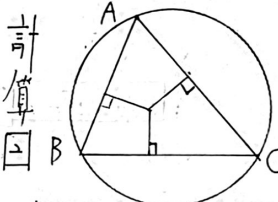
$$\frac{3}{2} \quad \square \quad f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad 2x f'(x) = 2x(-x)^{-2}, \quad 2\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

2. 已知 $f(2^x) = 6x \cdot \log_5 2 + 3$ ，求 $f(5) + f(25) + f(125) + \dots + f(5^8)$ 之值為

240

3. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求 A^{10} 的所有元之和為

68



$$\frac{T}{S} = \frac{\frac{1}{2}r^2(\sin A + \sin B + \sin C)}{\frac{1}{2}r(a+b+c)} = \frac{r}{2R}$$

4. 設 $x, y \in \mathbb{R}$ ，求 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + (2x - y + 1)^2} + \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (2x - y - 5)^2}$ 的最小值為

$\sqrt{46}$

5. 定義 $[x]$ 為小於或等於 x 的最大整數，則 $\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \left[\frac{2^3}{3}\right] + \dots + \left[\frac{2^{2026}}{3}\right]$ 的個位數字為

$$9 \quad \square \quad \frac{2(2^{2026}-1)}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2^{2027}-2}{3} - \frac{1}{3} \equiv \frac{8-2}{3} - \frac{1}{3} \equiv 9 \pmod{10}$$

6. 一個袋子裡有 4 顆黑球，3 顆白球，2 顆紅球。今從袋中取出球，一次取一球且取後不放回，試求紅球先被取完的機

$\frac{22}{45}$

$$\square \quad P(-W) \cdot P(RB|-W) + P(-B) \cdot P(RW|-B) = \frac{W \cdot B}{R+B+W} \left(\frac{1}{R+B} + \frac{1}{R+W} \right) = \frac{4 \cdot 3}{9} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) = \frac{22}{45}$$

7. 已知兩複數 z_1, z_2 滿足 $|z_1 - (6 + 8i)| = 3$ ， $|(1 + i)z_2 - 2i| = \sqrt{2}$ ，求 $|z_1 - z_2|$ 的最小值為

$\sqrt{14} - 4$

8. 已知 $ABCD$ 為圓內接四邊形，其邊長分別為 $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 2$ ， $\overline{CD} = 2$ ， $\overline{DA} = 6$ ，若向量 $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AD}$ ，試求數

$\left(\frac{22}{27}, \frac{11}{27}\right)$

$$\square \quad (x - (2 + \square))(x - (2 + \square))(x - (2 - \square))(x - (2 + \square)) = (x^2 - 4x + 4 - \square^2)(x^2 - 4x + 4 - \square^2)$$

9. 有一方程式 $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + kx + m = 0$ ，其四根成等差，若公差 $d > 0$ ，試求序對 (d, k, m) 為

$(2, 8, -15)$

$$\square \quad x^4 - 8x^3 + (24 - 10\square^2)x^2 + 8x - 15 \quad (\square = 2, d = 2\square = 4)$$

10. 有 10 位選手進行單循環賽，每兩人恰比賽一場，無和局。比賽結束後，發現不存在三位選手甲、乙、丙使得甲贏

乙、乙贏丙、丙贏甲。試求所有選手獲勝場數的平方和為

285

$$\square \quad \frac{1}{9} \{ \text{甲} > \text{乙} \text{ 且 } \text{丙} > \text{甲} \text{ 者 } 1 \text{ 次} \dots 9 \text{ 次} \} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = 285$$

二、計算證明題（每題 10 分，共 30 分）

1. 設 $f(x)$ 為實係數多項式，滿足 $f(0) = 0$ 且 $f(x^2 + 1) = (f(x))^2 + 1$ ，求所有符合條件的 $f(x)$ 。

$$f(x) = x$$

2. 已知 $\triangle ABC$ 的內切圓切三邊於 D, E, F ，且 $\triangle ABC$ 的外接圓、內切圓之半徑分別為 R, r 。若 $\triangle ABC$ 的面積為 S ， $\triangle DEF$

的面積為 T ，證明 $\frac{T}{S} = \frac{r}{2R}$ 。

$$\square \quad \frac{1}{2}rt \sin(t, e^{-t}), (s, -e^{s+1})$$

3. 若有兩曲線 $\Gamma_1: y = e^{-x}$ 及 $\Gamma_2: y = -e^{x+1}$ ，試求： $m = \frac{e^{-t} + e^{s+1}}{t - s} = -e^{-t} = -e^{s+1} \Rightarrow t = -(s+1)$

(1) 兩曲線的公切線 L 的方程式。

(2) 直線 L 與 Γ_1, Γ_2 的切點坐標。

$$y - e^{-\frac{3}{2}} = -e^{-\frac{3}{2}} \left(x + \frac{3}{2} \right) \\ \left(-\frac{3}{2}, e^{-\frac{3}{2}} \right), \left(\frac{1}{2}, -e^{-\frac{3}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{2e^{-t}}{-(2s+1)} = -e^{-t} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, -e^{-\frac{3}{2}} \right), \left(-\frac{3}{2}, e^{-\frac{3}{2}} \right) \\ \Rightarrow m = -e^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow y - e^{-\frac{3}{2}} = -e^{-\frac{3}{2}} \left(x + \frac{3}{2} \right)$$

計算

1. $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ 滿足 $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x^2+1) = (f(x))^2 + 1 \end{cases} \quad f(x) = ?$

sol: Define a sequence $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = (a_n)^2 + 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. Claim: $f(a_n) = a_n, \quad \forall n \geq 0$

$f(a_0) = f(0) = 0 = a_0$, assume $f(a_k) = a_k$ for some $k \geq 0$.

Then: $f(a_{k+1}) = f(a_k^2 + 1) = (a_k)^2 + 1 = a_{k+1}$

By induction, $f(a_n) = a_n, \quad \forall n \geq 0$

2. Finding $f(x)$

Let $g(x) = f(x) - x$. $g(x) = 0$ has infinitely many distinct real roots $a_0, a_1, \dots$. By the Fundamental Theorem of Algebra (the Identity Theorem for Polynomials) $g(x)$ must be the zero polynomial ($g(x) \equiv 0$) $\therefore f(x) = x$