

二、簡答題(每題 10 分)

1. 坐標平面上，以 Γ 表示多項式函數 $y = x^3 - 6x^2 + 10x$ 的圖形，且以 L 表示直線 $y = mx$ ，其中 m 為實數。根據上述，試回答下列問題。

- (1) 當 $m=2$ 時，試求出在 $x \geq 0$ 的範圍內， Γ 與 L 的三個相異交點的 x 坐標。(2 分) $0, 2, 4$
 (2) 承(1)，試求 Γ 與 L 所圍有界區域面積的值。(4 分) 8
 (3) 在 $x \geq 0$ 的範圍內，若 Γ 與 L 有三個相異交點，則滿足此條件的 m 之最大範圍為 $a < m < b$ ，試求 a 、 b 之值。(4 分) $(1, 6)$

$x^3 - 6x^2 + 10x = mx$
 $x^3 - 6x^2 + (10-m)x = 0$
 $x(x^2 - 6x + (10-m)) = 0$
 $x=0$ 或 $x^2 - 6x + (10-m) = 0$
 $\Delta = 36 - 4(10-m) > 0 \Rightarrow m < 1$
 $0 < m < 1$
 $A = \frac{1}{2} \int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 10x - 2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = \frac{1}{2} [\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2]_0^4 = \frac{1}{2} (64 - 128 + 64) = 8$

2. 設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $xf'(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + \int_0^x f(t)dt$ 對 $x \geq 1$ 恆成立。試回答下列問題。

- (1) 試求 $f(1)$ 。(2 分) 3
 (2) 試求 $f(x)$ 。(4 分) $4x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

(3) 試證明恰有一個大於 1 的正實數 a 滿足 $\int_0^a f(x)dx = 1$ 。(4 分) "Uniqueness"

"Existence" 令 $g(a) = 4a^4 - 3a^3 + 2a^2 - 2a - 1$

$\therefore g(1)g(2) = -1 \cdot 1 < 0$ & $g(x)$ is continuous on $[1, 2]$

$\therefore \exists c \in (1, 2) \rightarrow g(c) = 0$ by i.v.t.

$f'(x) = \frac{1}{x}(3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + \int_0^x f(t)dt)$
 $f'(x) = 3x^3 - 2x^2 + 2x + \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$
 $f'(1) = 3$
 $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 2$
 $g(a) = 4a^4 - 3a^3 + 2a^2 - 2a - 1$
 $g'(a) = 16a^3 - 9a^2 + 4a - 2$
 $g'(a) > 0, \forall a > 1$
 $g(a)$ is strictly increasing on $a > 1$

3. 學生在學習極限時，常發生以下作答算式：

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^2} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n^2} \right) + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2} \right) = 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = 0$

請問：(1) 極限的加法性質適用於有限多項 (2) $\frac{n(n+1)}{n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ 雖然 $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0$ ，但無窮多

(1) 這算式問題核心出自於哪裡？(3 分)

(2) 如何以學生所學數學知識作出正確解釋？(3 分)

(3) 於是在作極限的教學時，應該要注意什麼？(4 分)

1. 極限四則運算的適用前提：先化簡為

2. 極限各自存在 (closed-form) 封閉形式

3. 有限多項 (expression) 再取極限

"極小值" 累積起來會產生不可忽略的有限取值 (即 $\infty \cdot 0$ 的不定型概念) 故不能將極限拆開運算

find w s.t. $w^2 = i = e^{i(\frac{\pi}{2} + k\pi)}$
 $w_1 = e^{i(\frac{\pi}{4})}$
 $w_2 = e^{i(\frac{\pi}{4} + \pi)}$
 $= -w_1$

4. 以下為本校曾經出過的段考題目，請舉出其中不妥的地方(各 3 分)，並請試著依原出題老師的本意重新調整再出適切的評量題目(各 2 分)。

(1) 設 $f(x)$ 為多項式，若 $3f(x^2) + x \cdot f(x) = 3x^3 + 4x^2 - x + 6$ ，試求 $f(x)$ 的所有係數和？

(2) 若方程式 $x^2 + 4x + 6 = 0$ 之兩根為 α, β ，則 $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = ?$

改為 $x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow 6$ 原式求 $\alpha^2 + \beta^2$
 $f(x)$ 不存在
 $\deg f(x) = 1$
 $\deg(左式) = 2$
 $\deg(右式) = 3$
 $f(x) = x + 1$

高中無法處理
 $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$
 $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}$ 皆有
 $\alpha = -2 \pm \sqrt{2}i$
 $\beta = -2 \mp \sqrt{2}i$
 $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = 4\sqrt{6}e^{i(\frac{\pi-\theta_0}{2})} + 4\sqrt{6}e^{-i(\frac{\pi-\theta_0}{2})} = 8\sqrt{6}\cos(\frac{\pi-\theta_0}{2}) = 8\sqrt{6}\sin(\frac{\theta_0}{2})$
 $\cos\theta_0 = \frac{2}{\sqrt{6}}$
 $\sin\frac{\theta_0}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta_0}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{\sqrt{6}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{6}}}$
 $= 4\sqrt{6} \left(\frac{1-\frac{2}{\sqrt{6}}}{2} \right) = -4 + 2\sqrt{6}$

大學 (指定主值 principal value, 指定主平方根)
 $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ 規定 $z = re^{i\theta}$ 開平方根時
 取主角 θ 的一半得到的根，為主平方根
 $\alpha = -2 + \sqrt{2}i = \sqrt{6}e^{i(\frac{\pi-\theta_0}{2})}$ principal square root
 $\beta = -2 - \sqrt{2}i = \sqrt{6}e^{-i(\frac{\pi-\theta_0}{2})}$
 不然，有兩個答案