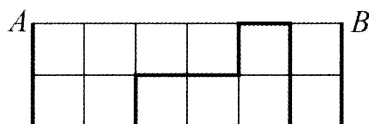
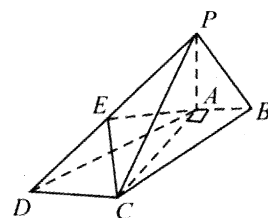


2026 TRML 高中數學競賽 團體賽

- 已知三次多項式函數 $f(x)$ 之大域特徵與 $y=3x^3$ 接近，又 $f(x)$ 在 $x=-1$ 附近之一次近似為 $x+5$ ，且 $f(-2)=1$ ，則 $f(x)$ 的各項係數和為 _____。
- 坐標空間中，一直線 $L: \frac{x+1}{2} = y-1 = \frac{z+3}{-2}$ 及兩點 $A(2,0,4)$ 、 $B(6,3,-1)$ 。若直線 L 在平面 E 上，且平面 E 與直線 AB 不相交。則 A 到平面 E 的距離為 _____。
- 在 2×6 單位長方形方格中，由左上角的頂點 A 走到右上角的頂點 B 的路徑中，每次移動一單位長，只能向右、向上或向下且路線不能重複的路徑共有 _____ 條。例如：下圖顯示一條可行的路徑。



- 滿足 $\frac{x^2-8x-15}{x+7} - \frac{x^2-8x-10}{x+12} + \frac{x^2-8x-5}{x+17} = 1$ 的正實數 x 為 _____。
- 如圖，在底面為平行四邊形 $ABCD$ 的四稜錐 $P-ABCD$ 中， $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{PA}$ 垂直平面 $ABCD$ ，且 $\overline{PA} = \overline{AB}$ 。若點 E 是 $\overline{PD}$ 的中點，且包含 $\triangle EAC$ 的平面與包含平行四邊形 $ABCD$ 的平面之兩面角為 θ ，則 $\sin \theta =$ _____。
- 將 $1,1,2,2,3,3,4,4,5,5$ (共 10 個數字) 排成一列，使得任兩個相同數字 k ($k=1,2,3,4,5$) 之間的數(若有的話)都比 k 大，則滿足以上條件的排列有 _____ 個。
- n 為小於 2026 的四位數。已知存在一正整數 m ，使得 $n-m$ 為質數，且 mn 為完全平方數。試問這樣的 n 有 _____ 個。



- 已知 15×19 階矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & \cdots & 38 \\ 39 & 40 & 41 & 42 & \cdots & 57 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 267 & 268 & 269 & 270 & \cdots & 285 \end{bmatrix}$ ，即從第一列起由左而右、由上而下各元依序為 $1, 2, 3, \dots, 285$ 。若對每一個 $m=1, 2, 3, \dots, 15$ ，將 A 的第 m 列各元都加上 m 所得到的矩陣為 B ，則矩陣 B 的各元中有 _____ 個是 7 的倍數。
- 將正整數 n 分拆為某些正整數的和。若將每一分拆的數都加上 1 後的數相乘，其乘積為 $3528 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$ ，則 n 的最小可能值為 _____。
- 對任意數列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，定義函數 f 如下：

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} a_1 & \text{若 } n=1 \\ f(a_1+a_2, a_2+a_3, \dots, a_{n-2}+a_{n-1}, a_{n-1}+a_n) & \text{若 } n \geq 2 \end{cases}$$

例如： $f(0,1,2,3) = f(1,3,5) = f(4,8) = f(12) = 12$ 。則 $f(0,1,2,\dots,100)$ 除以 1000 的餘數為

_____。

2026 TRML 高中數學競賽 思考賽

思考賽共 10 題，每題均為 6 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。准考編號已由大會直接印於答案紙上，在繳交的答案卷上，不可用其他方式表明隊伍的身份。

設 A 是由 0 與 1 組成的二元數列，以 $f(A)$ 表示「相鄰項 0,0 的組數」減去「相鄰項 1,1 的組數」。例如：數列 $A: 0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1$ 中，相鄰項為 0,0 的有 3 組（其中連續項 0,0,0 貢獻 2 組），相鄰項為 1,1 的有 2 組；因此， $f(A)=3-2=1$ 。如果二元數列 A 滿足 $f(A)=0$ ，則稱 A 為「 n 項平衡數列」。例如，在二元數列 $0,0,0,1,1,0,1,1$ 中，出現 0,0 與 1,1 的組數各 2 組；因此，數列 $0,0,0,1,1,0,1,1$ 為 8 項平衡數列。

對整數 $n > m \geq 0$ ，設滿足 $f(A)=m$ 的 n 項二元數列 A 有 $a_n(m)$ 種。當 $m=0$ 時， A 為 n 項平衡數列。例如，2 項二元數列中有 2 種平衡數列：1,0 及 0,1，故 $a_2(0)=2$ ；而 3 項平衡數列也有 2 種：1,0,1 及 0,1,0，故 $a_3(0)=2$ 。又在 4 項二元數列中，平衡數列有 4 種：0,1,0,1、1,0,1,0、0,0,1,1、1,1,0,0，故 $a_4(0)=4$ ；而滿足 $f(A)=1$ 的數列 A 有以下 3 種：0,0,1,0、1,0,0,1、0,1,0,0，因此， $a_4(1)=3$ 。

二元數列中的一「輪」(run)是指其一段連續的 0 區塊或連續的 1 區塊。例如，二元數列 0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1 中，共有 6 輪，其中數字 0 有 3 輪，分別為 0,0,0、0,0、0，而數字 1 也有 3 輪，分別為 1,1、1、1,1。我們可以容易發現：對每一個二元數列，若數字 0 分成 p 輪，而數字 1 分成 q 輪，則 p 與 q 的值相差都不會超過 1，即 $|p-q| \leq 1$ 。更明確地說，

(a) 當首項與末項數字不同時， $p=q$ ；例如，

$$0,0,1,1,1,0,1,1,0,1 \quad (p=3, q=3) \text{、} 1,0,0,0,1,1,0,0,0,0 \quad (p=2, q=2)。$$

(b) 當首項與末項均為 0 時， $p-q=1$ ；例如，

$$0,0,1,1,1,0,1,1,0,0 \quad (p=3, q=2)。$$

(c) 當首項與末項均為 1 時， $p-q=-1$ ；例如，

$$1,0,0,0,1,1,0,0,0,1 \quad (p=2, q=3)。$$

試依序回答下列問題。

- (1) 試找出所有可能的 8 項二元數列 $A: a, b, 0, 0, 0, 1, 1, 1$ 使得 $f(A)=0$ 。
- (2) 試求 $a_5(0)$ 之值，並請列出所有 5 項平衡數列。
- (3) 試求 $a_6(1)$ 之值，並請說明理由。

- (4) 試求 $a_7(2)$ 之值，並請說明理由。
- (5) 試問滿足 $f(A) \geq 0$ 的 6 項二元數列 A 共有多少種？並請說明理由。
- (6) 設 A 為 n 項二元數列 ($n \geq 2$)，其中 k 項為 0，分成 p 輪，且 $n-k$ 項為 1，分成 q 輪。試說明 $f(A) = 2k - n - p + q$ 。
- (7) 設 B 為 n 項二元數列 A 的一個重排，且 A 與 B 有相同的首項及相同的末項，試說明 $f(A) = f(B)$ 。
- (8) 試找出所有可能的 8 項二元數列 A ，滿足 $f(A) = 1$ ，且 A 的前七項與末七項都是 7 項平衡數列。
- (9) 對正整數 $n \geq 2$ ，試求 $a_n(0)$ 的一般式，並請說明理由。
- (10) 對正整數 $n > m \geq 1$ ，試求 $a_n(m)$ 的一般式，並請說明理由。

2026 TRML 高中數學競賽 個人賽 第一回

I-1. 在 $(1+2x)(1+4x^2)(1+8x^3)(1+16x^4)(1+32x^5)(1+64x^6)(1+128x^7)$ 的展開式中， x^8 項的係數為 _____。

I-2. 設 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，其中 $\overline{AB}=20$ ， $\overline{AC}=30$ ，點 D 在 $\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{BD}:\overline{DC}=10:7$ 。若 $\sin \angle BAD = \frac{3}{5}$ ，則 $\cos \angle BAC =$ _____。(以最簡分數表示)

I-3. 三角形 ABC 中，點 D 、 E 、 F 分別在線段 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 上，使得 $\overline{AF}:\overline{FB}=2:3$ 、 $\overline{BD}:\overline{DC}=4:5$ 、 $\overline{CE}:\overline{EA}=6:7$ 。設 $\overline{AD}$ 與 $\overline{EF}$ 交於點 G ，則 $\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}} =$ _____。

2026 TRML 高中數學競賽 個人賽 第二回

I-4. 坐標空間中，設直線 L 方程組為 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ ，點 A 的坐標為 $(1, 2, 0)$ 。若點 B 是直線 L 上離點 A 最近的一點，則點 B 的坐標為 _____。

I-5. $\triangle ABC$ 中，頂點 A 、 B 、 C 的對邊長分別是 a 、 b 、 c 。若 a^2, b^2, c^2 為等差數列，則 $\sqrt{3} \cos B + \sin B$ 的最小值為 _____。

I-6. 在 10×10 的方格(直橫線各 11 條線)中，每一個小格都是 1×1 的正方形，試問長、寬邊長分別為 1 奇 1 偶的矩形有 _____ 個。

2026 TRML 高中數學競賽 個人賽 第三回

I-7. 若正數 p, q 滿足有兩實數 α, β 使得 $x^2 + px - 1 = 0$ 的兩根為 α, β ，而 $x^2 + qx + 1 = 0$ 的兩根為 $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}$ ，則 $\frac{q}{p}$ 的最小可能值為 _____。

I-8. 若實數 x, y 滿足方程式 $\log(x^3 + y^3 + \frac{1}{27}) = \log x + \log y$ ，則 $x + 3y$ 之值為 _____。

I-9. 坐標平面上，已知過點 $P(5, 28)$ 的直線與拋物線 $y = x^2$ 交於 A, B 兩點。若 $\overline{AP} = 3\overline{BP}$ ，則 $\overline{AB}$ 長度的最小可能值為 _____。

2026 TRML 高中數學競賽 個人賽 第四回

I-10. 若 a, b 為正數，且 $\frac{ab}{a+2b} = \frac{12}{5}$ ，則 $2a + 9b$ 的最小可能值為 _____。

I-11. 在各位數字皆為 2、4、6 或 8 的四位數中，隨機選取一數，則此數為 24 的倍數之機率為 _____。(以最簡分數表示)

I-12. 坐標平面中，在以 $F_1(1, 3)$ 、 $F_2(5, 9)$ 為焦點且與 x 軸有交點的橢圓中，短軸長度的最小值為 _____。

2026 TRML 高中數學競賽 接力賽 第一回

R1-1. 滿足 $|x+2|\geq|x-2|$ 且 $|x-2|\leq|x-8|$ 的整數 x 有 _____ 個。

2026 TRML 高中數學競賽 接力賽 第一回

R1-2. 設 T 為前面傳來的答案。若多項式 x^3+Tx+1 除以 $x-1$ 的商式為 $q(x)$ ，則 $q(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為 _____。

2026 TRML 高中數學競賽 接力賽 第一回

R1-3. 設 T 為前面傳來的答案。若某長方體的一條對角線在其六個面上的正射影長分別為 $\sqrt{6}, \sqrt{6}, 5, 5, T, T$ ，則此對角線之長為 _____。

2026 TRML 高中數學競賽 接力賽 第二回

R2-1. 若對每一個實數 x ，不等式 $x^2 + 17 \geq 2x + k$ 都成立，則 k 的最大值為 _____。

2026 TRML 高中數學競賽 接力賽 第二回

R2-2. 設 T 為前面傳來的答案。坐標平面上，已知點 $A(T, \log_2 T)$ 在曲線 $y = \log_2 x$ 上，點 B 在曲線 $y = 2^x$ 上，且 $\overline{AB}$ 與 $y = x$ 垂直。若 O 為原點，則 $\triangle OAB$ 的面積為 _____。

2026 TRML 高中數學競賽 接力賽 第二回

R2-3. 設 T 為前面傳來的答案。如圖，長方形 $ABCD$ 中，點 E 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{AE}$ 與 $\overline{BD}$ 交於點 F 。若 $\triangle ADF$ 的面積為 T 且 $\triangle BEF$ 的面積為 35，則 $\triangle CDE$ 的面積為 _____。

