

2026.8.11(二) ~ 8.13(三) Ru

## 一、填充題 (每題 7 分, 共 56 分)

1. 計算無窮級數  $\boxed{1} \frac{3}{k(k+1)(k+2)} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{3}{4}$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 + 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)} + \cdots$$

之值為  $\frac{3}{4}$   $\boxed{2} (1+6)^6 = 2^6 \cdot 5^6 \cdot 7^6 \Rightarrow 7^3 = 343$   $\boxed{3}$  令  $x^2 = 2025, y^2 = 2026 \Rightarrow b = \frac{x+y}{y}$   
 法:  $xa = yb \Rightarrow \frac{x}{yb} + \frac{y}{yb} = 1, a = \frac{x+y}{x}$

2. 設  $A = 69^6 + 6 \times 69^5 + 15 \times 69^4 + 20 \times 69^3 + 15 \times 69^2 + 6 \times 69 + 1$ , 則  $A$  之正整數因數共有  $\frac{343}{2}$  個。  $\boxed{3}$  法:  $(2025a + 2026b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$   $\sqrt{x^2a + y^2b} = x+y$

3. 設  $a, b$  為正實數, 且  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ , 如果  $2025a^2 = 2026b^2$ , 則  $\sqrt{2025a} + \sqrt{2026b} = \frac{1}{\sqrt{2025} + \sqrt{2026}}$   $\boxed{3}$  法: 令  $k^2$   $\sqrt{2025} + \sqrt{2026} = \frac{1}{\sqrt{2025} + \sqrt{2026}}$   
 於  $2025a^2 = 2026b^2$

4. 已知實數  $a, b, c$  滿足下列條件:  $\Rightarrow \sqrt{2025} + \sqrt{2026} = k \Rightarrow (2025 \frac{k}{\sqrt{2025}} + 2026 \frac{k}{\sqrt{2026}})^{\frac{1}{2}} = k$

$$\begin{cases} \frac{a}{2^2+3^2} + \frac{b}{2^2+5^2} + \frac{c}{2^2+7^2} = 1 \\ \frac{a}{4^2+3^2} + \frac{b}{4^2+5^2} + \frac{c}{4^2+7^2} = 1 \\ \frac{a}{6^2+3^2} + \frac{b}{6^2+5^2} + \frac{c}{6^2+7^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{x+3^2} + \frac{b}{x+5^2} + \frac{c}{x+7^2} = 1$$

則  $a+b+c$  之值為  $\frac{139}{6}$   $\boxed{4}$   $\frac{a}{x+3^2} + \frac{b}{x+5^2} + \frac{c}{x+7^2} = 1$  Vieta's formulas  
 $a+b+c = 2^2+4^2+6^2+3^2+5^2+7^2 = \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} = 139$

5. 在一個盒子中裝有 2026 張卡片, 卡片上的編號依次為 1, 2, 3, ..., 2025, 2026, 現在每次抽取一張卡片, 每張卡片被抽取的機會均等, 抽取後就不再放回, 共抽取  $k$  次卡片。設隨機變數  $X$  為這  $k$  次抽取的卡片的最大編號, 則使得  $E(X) \geq 2000$  的最小的  $k$  的值為  $\frac{1}{k+1} \sum_{x=k}^N x C_k^x = \frac{1}{C_k^N} \sum_{x=k}^N x C_k^x = \frac{1}{C_k^N} C_{k+1}^{N+1} = \frac{k(N+1)}{k+1}$   
 $\boxed{5}$   $E(X) = \sum_{x=k}^N x P(X=x) = \sum_{x=k}^N x C_k^{x-1} / C_k^N = \frac{1}{C_k^N} \sum_{x=k}^N x C_k^{x-1} = \frac{1}{C_k^N} C_{k+1}^{N+1} = \frac{k(N+1)}{k+1}$

6. 設  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ , 其中  $a, b, c$  均為實數。已知  $f(x) = 0$  的所有根在複數平面的單位圓內或圓上, 則  $a^2 + c^2 - 8b$  的最大值為  $\frac{2027k}{k+1} \geq 2000$   
 $\boxed{6}$   $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1 \Rightarrow |z_1| = 1$

7. 投擲一個公正骰子四次, 試求投出的四個數的乘積為完全平方數的機率。  $\frac{25}{162}$   $f(x) = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})(x - e^{i\beta})(x - e^{-i\beta}) = (x^2 - 2\cos\theta x + 1)(x^2 - 2\cos\beta x + 1)$   
 $\Rightarrow a = c = -2(\cos\theta + \cos\beta), b = 4\cos\theta\cos\beta + 2$

8. 已在坐標平面上, 滿足以下不等式  $\Rightarrow 8(\cos\theta - \cos\beta)^2 - 16 \leq 8 \times 4 - 16 = 16$   
 $|3x + 2y - 2| + |3x - 2y + 5| + |3x + 2y + 2| + |3x - 2y - 5| \leq 14$   
 $\Rightarrow 8(\cos\theta - \cos\beta)^2 - 16 \leq 8 \times 4 - 16 = 16$

$\boxed{7}$  的點  $(x, y)$  所成的圖形面積為  $\frac{10}{3}$   $\boxed{8}$   $|x| + |y| \geq |x+y|$  "成立"  $\Rightarrow xy \geq 0$   
 $f(a, b, c) = (1+a+b+a^2+c+ab)^4$  在  $\mathbb{Z}_2$  中  $6^4 + 4^4 + 2^4 + 2^4 = 14$   
 $\Rightarrow 14 \leq |u+2+2-u| + |v+5+5-v| \leq 14$   
 $\Rightarrow -2 \leq u \leq 2, -5 \leq v \leq 5$   
 $\Rightarrow \frac{10 \times 4}{12} = \frac{10}{3}$

註: titu's lemma

$$\boxed{2} \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{b_1 + \dots + b_n}$$

$$3 = \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} \geq x + y + z$$

$$\sum_{cyc} \frac{x^4}{x^2 + 2x} \geq \frac{3^2}{3 + 2(x + y + z)} \geq \frac{9}{3 + 6} = 1$$

二、計算證明題 (每題 10 分, 共 20 分)

"=" 成立,  $x = y = z = 1$

1.  $\triangle ABC$  中,  $\overline{BC} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$ , 若  $P$  點在  $\overline{AB}$  上使得  $\overline{PA} = 3\overline{BP}$ ,

試證:  $\angle CAP = 2\angle CPA$ .  $\square$  在  $\overline{CA}$  上取一點  $D$  使

2. 設  $x, y, z$  為正實數且滿足  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ,  $\overline{AD} = \overline{AP}$

試證明:  $\frac{x^3}{2+x} + \frac{y^3}{2+y} + \frac{z^3}{2+z} \geq 1$ .

$$\text{Stewart's thm: } 3(r+2)^2 + r^2 = 4(x^2 + 3)$$

$$\Rightarrow x^2 = r(r+3) \Rightarrow \triangle ACP \sim \triangle PCD$$

$$\Rightarrow \angle CAP = 2\angle PAD = 2\angle CPA$$

三、申論題 (每題 12 分, 共 24 分)

1. 現今 AI 科技盛行, 已應用至各行各業, 欲從事數學教學工作者, 更須了解如何在教育上運用 AI 軟體。請就你(妳)的觀點, 具體敘述在數學科教學上及學生的學習如何運用 AI 軟體協助, 以增進教師教學及學生學習成效。

(12 分)

2. 在二次曲線的教學中, 學生對於「橢圓」的長軸與短軸通常能有直觀的幾何感受, 因為它們具體對應了橢圓圖形的長度與寬度。然而, 在進入「雙曲線」單元時, 學生經常對「共軛軸」與「漸近線」的概念感到十分抽象與虛幻。請依序回答下列問題:

(1) 請說明你會如何跟學生解釋雙曲線共軛軸的概念, 並說明如何在給定的雙曲線中畫出其共軛軸並定義共軛軸長。(6 分)

(2) 設計一段教學引導讓學生可以感受到雙曲線的漸近線(6 分)

① 為什麼雙曲線向外延伸時, 會越來越「貼近」這兩條直線(漸近線)?

② 為什麼雙曲線永遠「不會碰到」這兩條直線(漸近線)?

法 2:

(目的: 湊出  $\sum_{cyc} x^2$ )

$$\frac{x^3}{x+2} + \square \cdot x(x+2) \geq \frac{2}{3}x^2$$

"=" 成立,  $x = 1 \Rightarrow \square = \frac{1}{9}$

$$\sum_{cyc} \frac{x^3}{x+2} \geq \sum_{cyc} \frac{5x^2 - 2x}{9} = \frac{5 \cdot 3 - 2 \cdot 3}{9} = 1$$

$$\boxed{2} (2) \Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, P(x_0, y_0) \in \Gamma$$

$$y = \frac{b}{a}x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}, \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \rightarrow 1$$

$$L_1: bx + ay = 0, L_2: bx - ay = 0$$

$$d(P, L_1) d(P, L_2) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\left( \text{當 } x_0, y_0 \rightarrow \infty, d(P, L_2) = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2} |bx_0 + ay_0|} \rightarrow 0 \right)$$

反證法: 設  $P \in L_2$

$$(x_0, \frac{b}{a}x_0) \text{ 代入 } \Gamma \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{(\frac{b}{a}x_0)^2}{b^2} = 0 \quad \times$$