

一、填充題(每題 6 分) 2026. 8. 10 (-) Ru

1. 給定一個整係數三次多項式函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，已知 $f(0) = 0$ ， $f(2) = 2$ ， $420 \leq f(6) \leq 460$ ，則 $f(1) = \boxed{1}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x(ax^2 + bx + c) \\ \begin{cases} 2a + b = -3 \\ 34 \leq 6a + b \leq \frac{230}{3} - 36 = 40\frac{2}{3} \end{cases} &\Rightarrow 37 \leq 4a \leq 43\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{10} \quad \frac{b}{-23} \Rightarrow -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. 坐標平面上橢圓 Γ ，長軸在 x 軸，短軸在 y 軸，對原點逆時針旋轉 θ 角後得新橢圓 Γ' ： $29x^2 - 24xy + 36y^2 = 180$ ， $(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$ 為

新橢圓長軸頂點之一，若橢圓 Γ 上點 P 經此旋轉後的新點 P' 落在正向 y 軸上，點 P 坐標為 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ $\boxed{2}$

$$(0 + \sqrt{5}i)(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) \quad \begin{pmatrix} x+iy \xrightarrow{e^{i\theta}} x'+iy' \\ \xleftarrow{e^{-i\theta}} \end{pmatrix}$$

3. 有一枚不均勻硬幣，正面機率為 $\frac{2}{3}$ ，反面機率為 $\frac{1}{3}$ ，若擲 100 次這枚不均勻硬幣，正面次數為偶數的機率為 $\frac{1+b^{100}}{a}$ ，數對

(a, b) 為 $\boxed{3}$

$$\frac{1}{2} \left(\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right)^{100} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right)^{100} \right) = \frac{1 + (\frac{1}{3})^{100}}{2}$$

or $(2 \times 3^{100}, 3)$

4. 在複數平面上，複數 z 在第一象限， $|z| = 5$ 且 $\left| \frac{-7}{5} + \frac{24}{5}i - z \right| = \left| \frac{-7}{5} + \frac{24}{5}i - z \right|$ ，則複數 $z = \boxed{4}$

$$\frac{-24}{7} = \frac{2t}{1-t^2} \Rightarrow |2t^2 - 7t - 2| = 0$$

$$\frac{4+3}{3-4} \tan \theta = \frac{4}{3} \Rightarrow 3+4i$$

5. p 為正整數， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \boxed{5}$

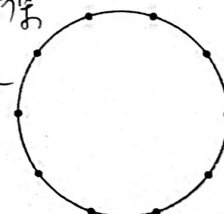
$$\frac{1}{p+1} \quad \boxed{5} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^p \rightarrow \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

6. 圓周上 10 等分點，任意選取 4 個等分點圍成四邊形，每一點被選取機會均等，則所圍四邊形至少有一個角是直角的機率為 $\boxed{6}$

法 1: $\frac{C_4^{10} - C_4^8}{C_4^{10}} = \frac{13}{21}$

法 2: $1 - \frac{C_4^5 \cdot 2^4}{C_4^{10}} = \frac{13}{21}$ (5 條直徑選 4 條，每條各挑一點)

法 3: $C_1^5 C_3^5 \cdot 2 + C_2^5 = 130$ (1 組直徑，2 組直徑)



7. $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，則 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{[n]}} = \boxed{7}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \right) + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} + 1 = 5$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

8. 平面上點 P 到正 $\triangle ABC$ 各頂點距離分別是 3、5、7，此正 $\triangle ABC$ 面積為 $\boxed{8}$

$$\frac{19\sqrt{3}}{4} \quad \boxed{8} \quad \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} (9+25+49) \pm \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \right) \Rightarrow \frac{83 \pm 45}{8} \Rightarrow 16\sqrt{3} \text{ or } \frac{19}{4}\sqrt{3}$$

or $16\sqrt{3} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$

二、計算題(52 分)

1. 高中數學題目：

(1) 袋中有紅球 3 顆、白球 2 顆，每球被抽到的機會均等。從袋中抽出 2 顆球，令隨機變數 X 為抽出紅球顆數，求隨機變數 X 的期望值。

(2) 袋中有紅球 3 顆、白球 2 顆，每球被抽到的機會均等。每次從袋中抽出 1 顆球，取後不放回，抽 2 次，令隨機變數 X 為抽出紅球顆數，求隨機變數 X 的期望值。

學生作法：

Indicator (random) variable $I_A = \begin{cases} 1, & \text{事件A發生} \\ 0, & \sim \text{未} \sim \end{cases}$

正 (1) 每球被抽到的機會均等，期望值等於平均數，抽 1 顆球紅球的期望值為 $\frac{3}{5}$ ， $\therefore X$ 的期望值為 $\frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{6}{5}$

錯 (2) 每次抽出紅球機率均為 $\frac{3}{5}$ ， X 為 $n=2$ ， $p=\frac{3}{5}$ 的二項分布， $\therefore X$ 的期望值為 $np = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$

學生作法是否正確？如果正確，回答正確即可，如果有誤，寫出學生的錯處及正解。

(2) $X \sim \text{Bin}(n, p)$ 需滿足每次試驗獨立且固定 (2) 令 $X_i \equiv \#i\text{-次抽到R之指示變數}$

$$P(X_2) = \frac{3}{5} \neq P(X_2|X_1)$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

2. 將地球儀設定成一個坐標空間，球心為原點 O ，地球儀上 A, B 兩個城市的坐標 $A(5, 0, 0)$ ， $B(3, 4, 0)$ ，求地球儀上點 C 使得三城市 A, B, C 任兩點在球面上的最短距離皆相等。

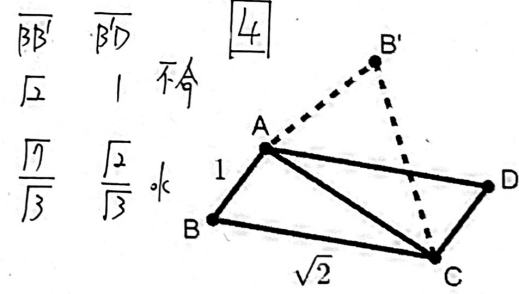
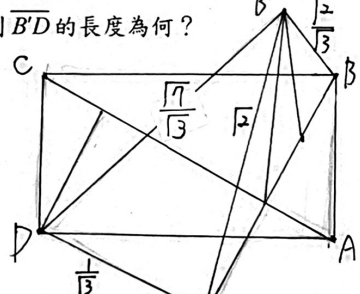
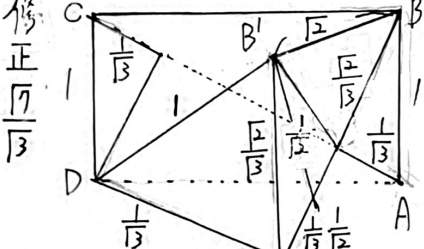
$$\left(3, \frac{3}{2}, \pm \frac{\sqrt{55}}{2}\right) \quad \begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \\ 25 = \frac{45}{4} + z^2 \end{cases} \Rightarrow \left(3, \frac{3}{2}, \pm \frac{\sqrt{55}}{2}\right)$$

3. 設 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，滿足 $[x^3] = 4x + 3$ 的實數 x 為【

$$-\frac{5}{4} \quad \begin{cases} [x^3] = k = 4x + 3 \Rightarrow 0 \leq k^3 - 9k^2 - 37k - 27 < 64 \Rightarrow (k+1)(k^2 - 10k - 27) \geq 0 \\ \text{or } -1 \Rightarrow k \leq x^3 = \left(\frac{k-3}{4}\right)^3 < k+1 \end{cases} \Rightarrow k = -1, -2 \quad \text{or } k = 13, \dots$$

4. 長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{BC} = \sqrt{2}$ ，沿著對角線 $\overline{AC}$ 摺起後， B 移動到 B' ，如下圖 ($\overline{AB} = \overline{AB'}$ ， $\overline{CB} = \overline{CB'}$)。若 $\overline{B'B} > \overline{B'D}$ 且

平面 $AB'C$ 與平面 ADC 夾 60° 角，則 $\overline{B'D}$ 的長度為何？



5. 已知圓 O 為圓形鏡面，光線從圓周上一點 A 射向圓內一點 P ，經過 B, C 兩次反射後正

好再次通過 P 點 (如圖所示)，若 $\overline{OP}$ 長為圓 O 半徑長的一半，則 $\sin \angle AOP$ 的值为

$$\frac{2}{1} = \frac{\sin(90^\circ - 2\theta)}{\sin \theta} = \frac{1 - 2\sin^2 \theta}{\sin \theta} \Rightarrow 2\sin^2 \theta + 2\sin \theta - 1 = 0 \Rightarrow \sin \theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(90^\circ - 3\theta) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)$$

