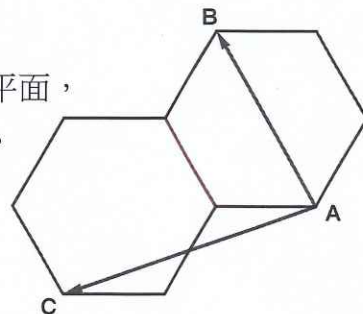


國立北港高級中學115學年度第一次專任教師甄選數學科試題

第一大題：填充題（每題4分）

1. 設 a 為實數，若方程式 $\left|x^2 - 4x - 1\right| = a$ 恰有三個相異實數解，則 $a =$ _____。
2. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式且其最高次項係數為1，已知 $f(1) = 1, f(2) = 2, f(5) = 5$ ，則 $f(6) =$ _____。
3. 對任意實數 x ，若 $\log_{a^2-1}(x^2 - 2x + a)$ 恆有意義，則實數 a 的範圍為_____。
4. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ，函數 $f(x) = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x$ ，求 $f(x)$ 的最小值=_____。

5. 右圖是兩個邊長為2的正六邊形裝置藝術，共用一個邊連接而成一個平面，若A、B、C為其中三個頂點，求圖中兩向量內積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____。



6. 設平面E通過 $P(2, 3, 1)$ 且與 x 軸、 y 軸、 z 軸的正向交於A、B、C三點，又O為原點，當 $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC}$ 有最小值時，平面E的方程式為_____。

7. 工廠庫存鋼條總長 20 公尺，現將其裁切並焊接成一個底面為正方形的長方體骨架。在不考慮材料損耗下，此長方體的最大體積為_____立方公尺。

8. 一年一度的臺北國際車展盛大展開。今年共有 T、B、P 三家車廠參展，每家車廠各推出兩款新車，如下表。本題將電動車、燃油車及油電混合車視為三種不同類型。

車子廠商	T牌		B牌		P牌	
新款車型	T1	T2	B1	B2	P1	P2
類型	電動車	燃油車	油電混合車	電動車	燃油車	燃油車

六款車型分別展示於 A、B、C、D、E、F 六個展示攤位，每個攤位僅展示一款車。為配合政府推廣淨零運輸政策，A 攤位不得展示燃油車；F 攤位不得展示電動車。則符合上述條件的排列方式共有_____種。

9. 臺灣地震頻繁，某保險公司規劃推出「住宅地震損失保險」。根據過去資料，一棟房屋於地震發生時的損壞程度及其機率如右表。

保險理賠規則如下：

全損：賠償投保房價的 80%；

半損：賠償投保房價的 40%；

四分之一損：賠償投保房價的 20%；

其餘小損傷：不予理賠。

若房屋投保金額為 1000 萬元，且保險公司希望每張保單的期望獲利為 2 萬元，則應收取的保費為_____元。

損壞情形	全損	半損	四分之一
機率	$\frac{1}{1000}$	$\frac{5}{1000}$	$\frac{10}{1000}$

10. 有 4 筆二維數據如下表，若 y 對 x 的迴歸直線方程式為 $y = x + 3$ ，則數對 $(m, n) =$ _____。

x	1	2	2	3
y	3	3	m	n

11. 設 n 為正整數。第 n 個費馬數(Fermat Number)

定義為 $F_n = 2^{(2^n)} + 1$

例如， $F_1 = 2^{(2^1)} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ ， $F_2 = 2^{(2^2)} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ 。

試問 $\frac{F_{12}}{F_{11}}$ 的整數部分以十進位表示時，其整數位數是_____位數。

12. 兩函數 $f(x) = x$ ， $g(x) = \frac{1}{4}x^3$ 的圖形所成的封閉區域面積為_____。

13. 若 A 、 B 、 C 為一個三角形三頂點，

試求 $(\sin \frac{A}{2} + i \cos \frac{A}{2})(\sin \frac{B}{2} + i \cos \frac{B}{2})(\cos \frac{C}{2} - i \sin \frac{C}{2}) =$ _____。

14. 給定實數 a, b ，設函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & , x \geq 2 \\ ax + b[x^2] & , x < 2 \end{cases}$ ，其中 $[x^2]$ 表示不大於 x^2 的最大整數。若 $f(x)$ 在 $x=2$ 可微分，則數對 $(a, b) =$ _____。

15. 在坐標平面上，已知 P 點在 x 軸上方，直線 PA 、 PB 、 PC 分別與 x 軸交於 A 、 B 、 C 三點，且直線 PA 的斜率為 $\frac{12}{5}$ ， PC 的斜率為 $\frac{3}{4}$ ，若直線 PB 為 $\angle APC$ 的角分線，則直線 PB 的斜率為_____。

第二大題：計算證明題（需寫出詳細過程，每題8分）

1. 已知平面上直角三角形三邊長 $\overline{AB} = 30$, $\overline{AC} = 18$, $\overline{BC} = 24$ 。若分別以 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 為底邊在 $\triangle ABC$ 外部作頂角等於 2θ 的等腰三角形 $\triangle MAB$ 與 $\triangle NAC$ ，其中 $\cos 2\theta = \frac{-1}{8}$ ，試求

(1) 線段 $\overline{AM}$ 長=_____。（4分）

(2) $\triangle AMN$ 的面積。（4分）

2. 對於 $k > 0$ ，令 $I_k = 10\dots 064$ ，其中在1與6之間有 k 個0，並以 $N(k)$ 表 I_k 質因數分解中因數2的個數。試問 $N(k)$ 的最大值是多少？

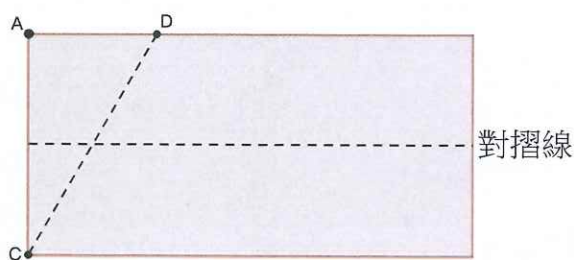
第三大題：教學情境應用題（每題8分）

請依各題情境，運用數學知識或教學專業完成作答，並適當說明理由或論證過程。

1. 某電視政論節目中，一位來賓表示：「某型防空飛彈每發攔截成功率約為70%，因此若同時發射3發飛彈，攔截成功率可達210%，一定能成功攔截目標。」請回答下列問題：

- (1) 若您是高中數學教師，會如何引導學生辨識上述說法中的數學問題？並說明此教學活動可培養學生哪些媒體識讀能力。（4分）
- (2) 請指出題目中尚缺少哪些必要資訊，並在合理假設下，計算一次發射三發飛彈時，目標被成功攔截的機率。（4分）

- 2.正四面體、正八面體及正二十面體皆可由正三角形組成。為協助學生建立空間概念，教師設計以 A4 廢紙摺製正多面體的活動。請以橫放的 A4 矩形紙張為例，說明如何利用頂點 A 與對摺線，使摺痕線段 CD 產生的三角形 $\triangle ACD$ 為 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 的三角形，並完成幾何論證。（8分）



- 3.自然對數 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2.7182818284...$

教師利用科學計算機探討自然對數 e 的近似值時發現當 $n = 10^{15}$ 時，計算結果與 e 近似值明顯不符。請利用二項式定理分析此現象。

- (1) 當 n 為正整數時，請將 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 展開成下列形式

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \dots$$

並寫出其一般項與最後一項。

(4分)

- (2)利用(1)的結果，證明當 n 為正整數時，

數列 $\langle (1 + \frac{1}{n})^n \rangle$ 的每一項皆小於 3。（4分）

GeoGebra 科學計算機



$$1) \quad \left(1 + \frac{1}{10^2}\right)^{(10^2)} \\ = 2.7048138294215$$

$$2) \quad \left(1 + \frac{1}{10^3}\right)^{(10^3)} \\ = 2.7169239322359$$

$$3) \quad \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{(10^4)} \\ = 2.7181459268252$$

$$4) \quad \left(1 + \frac{1}{10^{15}}\right)^{(10^{15})} \\ = 3.0350352065493$$