

13. 一正立方體有 6 個表面，每個表面有 2 條對角線，故一正立方體共有 12 條「表面對角線」。

現將一正立方體置於空間坐標系中，已知其中 2 條「表面對角線」分別位在兩直線 $L_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{5}$ 與

$L_2: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-5}{-4}$ 上，試求此正立方體的體積為_____。(8 分)

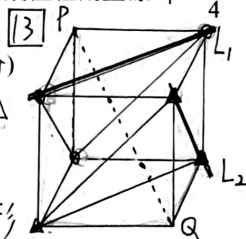
$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 4(-1)(-4) - 1(-20) - 5(-4) = 16 + 20 + 20 = 56$$

$$\frac{|(2, -3, -6) \cdot (1, -1, -1)|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|2+3+6|}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

2 个正△

投影

正六边形



$$d(L_1, L_2) = \frac{PQ}{3} = \frac{\sqrt{3} \cdot \text{边长}}{3} = \frac{11}{\sqrt{3}} \Rightarrow 11^3 = 1331$$

14. 在高中課程有關球面的單元中，解題時常會用到下面性質：正六边形

「在球面上，連接相異兩點的最短路徑必為大圓的圓弧線段」

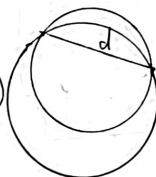
請問你如何向學生說明此性質是正確的，試「簡述」之。(5 分)

大圓：過球心之平面與球體所截之圓，半徑最大(為球之半徑)

小圓：不過

~

半徑 $r < R$



大圓：曲率小

最平緩，彎曲程度低

15. 此題為 108 指考試題，也是學生常感到困惑的一道題目，請問身為教師的你會採取何種策略引導學生解題？(5 分) 長度最短

坐標平面上以原點 O 為圓心的單位圓上三相異點 A, B, C 滿足 $2\vec{OA} + 3\vec{OB} + 4\vec{OC} = \vec{0}$ ，其中 A 點的坐標為 $(1, 0)$ 。試選出正確的選項。

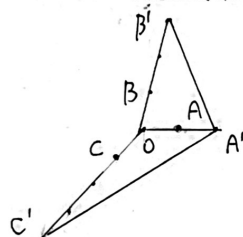
(1) 向量 $2\vec{OA} + 3\vec{OB}$ 的長度為 4

(2) 內積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} < 0$

(3) $\angle BOC, \angle AOC, \angle AOB$ 中，以 $\angle BOC$ 的度數為最小

(4) $AB > \frac{3}{2}$

(5) $3\sin \angle AOB = 4\sin \angle AOC$



$$\cos \angle AOB$$

$$\cos \angle AOC$$

$$\cos \angle BOC$$

$$\angle BOC > \angle AOC > \angle AOB$$

0 為 $\triangle A'B'C'$ 之重心

$$3\Delta AOB = 4\Delta AOC$$

16. 有一道題目如下：

在坐標平面上有一橢圓，它的長軸落在 x 軸上，短軸落在 y 軸上，長軸、短軸的長度分別為 4、2，如圖所示。

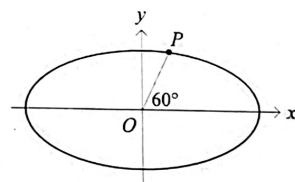
通過橢圓的中心 O 且與 x 軸夾角為 60° 的直線在第一象限跟橢圓交於 P ，

試求此交點 P 與橢圓中心 O 的距離？

學生作法如下：

點 P 在橢圓上，橢圓的 $a=2, b=1$

$$\text{得知 } P \text{ 坐標為 } (2\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) = (1, \frac{\sqrt{3}}{2}), \text{ 得 } \overline{OP} = \sqrt{1^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$



請問該生此作法，有何舊經驗，舊知識的干擾？如何協助他，學習正確的新知識，並引導解題。(5 分)

$$\tan 60^\circ = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\begin{cases} 9-2+\beta-2 > 0 \\ (9-2)(\beta-2) > 0 \\ D \geq 0 \end{cases}$$

17. 有一道題目：「若方程式 $x^2 + (m-2)x + (5-m) = 0$ 的兩根皆大於 2，求實數 m 的範圍。」

某生的做法如下：

解：設該方程式兩根為 α, β

counterexample

(0, 1)

$$\text{則由 } \begin{cases} \alpha > 2 \\ \beta > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta > 4 \\ \alpha\beta > 4 \end{cases}, \text{ 再由根與係數關係得知 } \begin{cases} -(m-2) > 4 \\ 5-m > 4 \end{cases}, \text{ 所以 } m < -2 \dots\dots \textcircled{1}$$

又方程式有實根，判別式 $\Delta = (m-2)^2 - 4(5-m) = m^2 - 16 \geq 0$

即 $m \leq -4$ 或 $m \geq 4 \dots\dots \textcircled{2}$ ，由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 得到答案為 $m \leq -4$

$$-5 < m \leq -4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > -5 \\ m \geq 4 \text{ or } m \leq -4 \end{cases} \Rightarrow -5 < m \leq -4$$

試問學生的做法正確與否？如果正確，你是否有其他作法提供他參考？

若有錯誤，請問要如何指出錯誤，並教導學生正確解法？(5 分)