

~85(三) Ru

數學科試題

作答說明：每題皆為計算題，請寫出計算過程，並將最後答案填入答案格裡。第 14~17 題直接說明即可。作答時間 120 分鐘，滿分 120 分。

1. 假設有一個不公正的硬幣，擲出正面的機率為 $\frac{3}{4}$ ，則擲出 30 次，硬幣出現偶數次正面的機率為 $a + \frac{1}{2^n}$ ，其中 n 為正整數，試求此時 $(a, n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5 分)

(1/2, 31) $\square \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right)^{30} + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right)^{30} \right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^{31}$

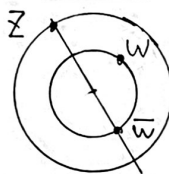
2. 若用 3 種不同顏色塗一個 n 邊形的 n 個邊，每邊塗一色，且相鄰兩邊必異色，令 a_n 表所有塗色方法，則

$\square a_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ ，試求 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式並詳述產出過程？答： $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(5 分)

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - a_{n-1} (n \geq 4)$ $\left(a_n + a_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} \right)$
 直線首尾排列 同色 $a_3 = 6$

3. 若複數 z 滿足 $|z| = 2$ ，則 $\frac{|z^2 - z + 1|}{|2z - 1 - \sqrt{3}i|}$ 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(8 分)

$\square \frac{3}{2}$ $\frac{1}{2} \left| z - \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right| = \frac{1}{2} \left| z - \bar{w} \right| \leq \frac{3}{2}$



4. 若 P 為 $\triangle ABC$ 內部一點，且 $2\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$ ， $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ ， $\overline{BC} = 2$ ，則 $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$ 內積的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(8 分)

$\square \frac{-1}{4}$ $4x^2 = 2(x^2 + 1) + 2\vec{PB} \cdot \vec{PC} \Rightarrow \vec{PB} \cdot \vec{PC} = x^2 - 1 \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 1 = \frac{-1}{4}$



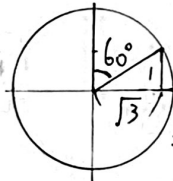
5. 坐標平面上，將一個過原點且半徑為 r 的圓完全放入 $y \geq x^4$ 的區域內，則 r 的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(8 分)

$\square \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2}}{4}$ $\square$ 設交點 $(t, t^4) \Rightarrow t^2 + (t^4 - r)^2 = r^2 \Rightarrow t^2(t^6 - 2rt^2 + 1) = 0$
 $\Rightarrow r = \frac{1}{2} \left(t^4 + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2t^2} \right) \geq \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{2}$

6. 求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - \left(\frac{\sqrt{3}k - \ln(1 + \frac{1}{n})^n}{n} \right)^2}$ 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(8 分)

$\square \frac{4\pi}{\sqrt{3}} + 3$ $\square \frac{6}{n} \sum \sqrt{4 - \left(\sqrt{3} \left(\frac{k}{n} \right) - \frac{1}{n} \ln e \right)^2} \rightarrow 6 \int_0^1 \sqrt{4 - 3x^2} dx$

法1: $(\sqrt{3}x)^2 + y^2 = 4$ $\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 6$
 $0 \leq x' = \sqrt{3}x \leq \sqrt{3}$ $\Rightarrow \frac{4\pi}{\sqrt{3}} + 3$



法2: $4\cos^2\theta = 4 - 4\sin^2\theta = 4 - 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\theta \right)^2$

$dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\theta d\theta$, $\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\theta \in [0, 1]$
 $\Rightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$

$\square \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta d\theta = \frac{12}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\theta) d\theta$
 $= \frac{4\pi}{\sqrt{3}} + 3 \leftarrow \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

12. 法 1 令 E_k 為前 k 次取到 RR 之期望次數

所求 $E_0 = 1 + \frac{1}{3}E_1 + \frac{2}{3}E_0$

到 stop 時之期望次數 $E = 1 + E'$ (與前一次不同之期望次數)

到 stop 時之期望次數 $E' = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3}E' \Rightarrow E' = 1 + 3 = 4$

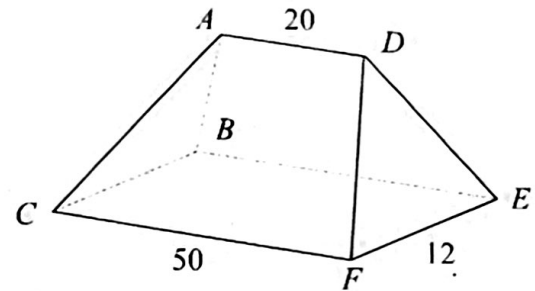
故 $E = 1 + 3 = 4$

7. 有一積木 (示意圖如右圖結構), 其中 $ACFD$ 和 $ABED$ 是兩個全等的等腰梯形, $BCFE$ 是一個矩形。頂端稜邊 AD 與底部平面 $BCFE$ 平行。已知各邊長度數據如下: 頂端稜邊長 $AD = 20$, 底部矩形長 $CF = 50$, 底部矩形寬 $EF = 12$, 頂端 AD 到底部平面 $BCFE$ 的垂直高度為 10 (即頂點 D 在底面的投影點 P , $DP = 10$)。
- 試求: 此積木的體積為 _____。(8 分)

2400

7. $\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 30 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20 = 2400$

左右合併 中間



8. 坐標空間中, $O(0,0,0)$ 為原點, 平面 $z=h$ (其中 $0 \leq h \leq 1$) 上有一以 $(0,0,h)$ 為圓心的圓, 在此圓上依順時鐘順序取 6 點構成正六邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$, 使得各線段 $\overline{OP_j}$ ($0 \leq j \leq 5$) 的長度都是 1, 請參見示意圖。在 $\overline{OP_0}$ 和 $\overline{OP_3}$ 夾角不超過 90° 的條件下, 若 $V(h)$ 是以 O 為頂點, 正六邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ 為底的正六角錐體積, 試問正六角錐體積 $V(h)$ 的最大值為 _____。(8 分)

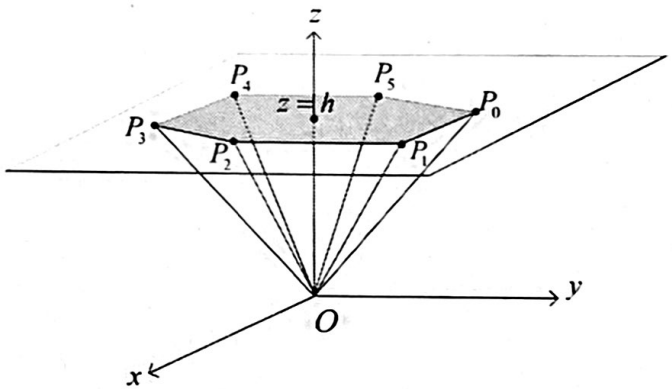
8. $2\sqrt{1-h^2} \leq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq h^2$

$V(h) = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (1-h^2) \cdot h$

$V'(h) = 0$
 $\Rightarrow h^2 = \frac{1}{3}$ (不合)

$\leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{8}$

$(h^2 = \frac{1}{2})$



9. 若 a, b, c 三個正實數的總和為 12, 求 $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+4} + \sqrt{c^2+16}$ 的最小值為 _____。(8 分)

9. $|a, 1| + |b, 2| + |c, 4| \geq |(12, 7)| = \sqrt{193}$

"=" 成立時, 三向量平行且同向

10. 已知 P 為橢圓 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 上一個動點, 設 F 為橢圓在 x 軸上方的焦點, $A(7, -3)$ 為一個定點, 則滿足 $\overline{PA} + \overline{PF}$ 為整數值的 P 點共有 _____ 個。(8 分)

15



$\sqrt{85} = \overline{AF} \leq \overline{PA} + \overline{PF} = 10 + \overline{PA} - \overline{PF} \leq 10 + \overline{AF'} = 17$

$10, 11, \dots, 16, 17$

$7 \times 2 + 1 = 15$

11. 若正 $\triangle ABC$ 的三頂點 A, B, C 分別在半徑為 $\sqrt{3}, 2, \sqrt{7}$ 的同心圓上, 且此同心圓圓心在正 $\triangle ABC$ 內部, 則此正 $\triangle ABC$ 的面積為 _____。(8 分)

$\frac{13\sqrt{3}}{4}$

11

$\cos \theta = \frac{6}{2\sqrt{3}\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} (3+4+7) + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \right) = \frac{13\sqrt{3}}{4}$

12. 設一袋中有紅、黃、藍色的球各一顆, 若每次從袋中取出一球 (每球被取出的機會均等), 紀錄顏色後放回, 然後再取一球...

(1) 若連續兩次取出紅球即停止取球, 則取球次數的期望值為何? 答: _____。(5 分)

(2) 設在 n 次 stop

(2) 若連續兩次取出相同顏色的球即停止取球, 則取球次數的期望值為何? 答: _____。(5 分)

進場

獎金

$\frac{1}{3} = 3$ 元

【作題說明: 若欲使用公式解題, 請先證出公式, 否則不予計分。】

12. Gambler's 設在 n 次

法: Entrance Stop Method

進場 #n-1 位 #n 位

$\frac{n-1}{3} = 3 \Rightarrow \frac{3}{3} = 9 \Rightarrow \frac{1}{3} = 3$

#n-1 人: ex: $\frac{n-2}{3} \frac{n-1}{3} \frac{n}{3}$

#1 人: $\frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3}$

$E = 1 + 3 = 4$

0 元