

國立竹東高級中學 115 學年度第四次（正式）教師甄選 數學科 筆試試題

一、填充題：每題 7 分，共 70 分

1. 試求方程式 $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ 的所有實根和為何？ 3

2. 坐標平面上有三條直線 L, L_1, L_2 ，其中 L 的斜率為 $\frac{1}{4}$ ， L_1, L_2 的斜率分別為 $\frac{3}{4}$ 及 $-\frac{3}{4}$ ，已知 L 被 L_1, L_2 所截出的線段長為 102，則 L, L_1, L_2 三條直線所圍成的三角形面積為何？ 1632

3. 已知三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ （其中 $a, b, c, d \in R$ 且 $a \neq 0$ ），若函數 $f(x)$ 的對稱中心為 $(1, 2)$ ，且局部看函數 $y = f(x)$ 的圖形在 $x = 2$ 附近近似於一條斜率為 -4 的直線，則 $\left| \frac{b^2 + c^2 + d^2}{a} \right|$ 的最小值為何？ 28

4. 投擲一均勻骰子 4 次，出現點數依次為 a, b, c, d ，求四個點數乘積 $abcd$ 為 100 的倍數的機率為何？ 41/648

5. 已知空間中有一個四面體的四個頂點分別為 $A(0, 0, 1)$, $B(2, 4, 0)$, $C(0, 0, 0)$, $D(4, 2, 0)$, 平面 E 通過 A 點與 $\overline{BD}$ 中點且與 $\overline{BC}$ 有交點, 若平面 E 將此四面體分成兩塊, 其中一塊的體積為原四面體的 $\frac{1}{3}$, 求平面 E 的方程式為何? $5x - 7y - 6z + 6 = 0$

6. 設 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ 為複數平面上不共線的三點, 且都不在實軸上, $\alpha\beta\gamma \neq 0$, 若 $\overline{AC} = 4$ 且 $\alpha^2 + 4\beta^2 + 5\gamma^2 = 2\gamma(\alpha + 4\beta)$, 則 $\overline{AB}$ 長為何? $2\sqrt{5}$

7. 以四種顏色畫筆塗下圖 8 格方格(固定的, 不考慮旋轉), 每種顏色皆各塗兩格, 每格方格只塗一種顏色, 同色不相鄰, 則有幾種不同的塗法? (只考慮最後結果, 不考慮過程中方格塗色的順序) 504



8. 已知空間中兩點 $A(7, 6, 3)$, $B(5, -1, 2)$ 與直線 $L: \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-3}{-2}$, 若 P 為直線 L 上的動點, 求 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 的最小值為何? $3\sqrt{10}$

9. 設橢圓 Γ 之方程式為 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ，兩焦點為 $F_1(0, c)$ 及 $F_2(0, -c)$ ，其中 $c > 0$ 。設 R 為 Γ 內部被兩正焦弦所夾之區域。將 R 繞 Γ 的長軸旋轉一周形成一酒桶狀立體區域 V ，則 V 的體積之值為何？ $1416\pi/25$

10. 假設矩陣 $M = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & -32 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -13 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -7 & 9 \end{bmatrix}$ 經過多次的列運算之後，得到另一個矩陣 $M' = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 & a & d \\ 2 & 1 & 4 & b & e \\ 1 & 3 & -3 & c & f \end{bmatrix}$ ，試求序組 (a, b, c, d, e, f) 為何？ $(2, -12, 19, 15, 8, 4)$

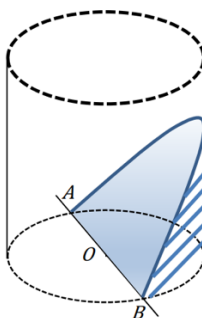
二、計算證明題：每題 10 分，共 30 分

1. 若存在三個相異實數 k 使得 $y = kx + 3$ 與 $y = 2x^3 - 6x^2 + a$ 相切，求：

(1) 實數 a 的範圍？(4 分) $1 < a < 3$

(2) 滿足此條件的整數 a 及有理數 k 所代表的曲線與切線所圍成的面積？(6 分) $27/32$

2. 如圖，有一個底半徑為 6 公分的圓柱體，被一個通過底圓直徑 AB 且與底面夾 60° 角的平面所截，試求所截出的立體體積。(如圖陰影與斜線的體積) (10 分) $144\sqrt{3}$



3. n 筆數據 (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq n$ ，若 n 筆數據 (x_i, y_i) 的相關係數存在並記為 r ，試利用『高一』數學範圍的方法證明 $|r| \leq 1$ 。(10 分) 略