

O. 圓 Γ_1 是 $\triangle ABC$ 的外接圓， $\overline{AB}=8$ 、 $\overline{BC}=7$ 、 $\overline{CA}=6$ ， D 為直線 BC 上一點，滿足直線 AD 與圓 Γ_1 相切於 A 點，圓 Γ_2 通過

$\frac{64}{27}$ A 、 D 兩點，且和直線 BD 相切於 D 點，圓 Γ_1 、圓 Γ_2 交於 A 、 E 兩點，則 $\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} =$

$\triangle PBE \sim \triangle PAC$, $\triangle PCE \sim \triangle PAB$

$\overline{PC} \cdot \overline{PB} = \overline{PE} \cdot \overline{PA} = \overline{PD}^2$

$(9-x)(16-x) = x^2 \Rightarrow x = \frac{144}{25}$

$\frac{(\overline{BE})}{(\overline{BP})} \cdot \frac{(\overline{AB})}{(\overline{CE})} = \frac{(\overline{AC})}{(\overline{AP})} \cdot \frac{(\overline{AP})}{(\overline{PC})} \Rightarrow \frac{(\overline{BE})}{(\overline{CE})} = \frac{(\overline{AC})}{(\overline{AB})} = \frac{3}{4}$

$\frac{6}{8} \cdot \frac{16-x}{9-x} = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{256}{81} = \frac{64}{27}$

P. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 且 $\langle F_n \rangle$ 為費波納契數列，滿足 $F_1 = F_2 = 1$ ，若 F_{2025} 恰為 $\langle a_n \rangle$ 的第 m 項，則 $m =$

$\Rightarrow (Q_{n+1} - Q_{n-1})(Q_{n+1} + Q_{n-1} - 7Q_n) = 0$

$Q_0 = A + B = 1$

$Q_1 = (A+B)(\frac{7}{2}) + (A-B)\frac{3\sqrt{5}}{2} = 5$

$\Rightarrow A-B = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow A = \frac{5+\sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$

$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{4n+1} + \phi^{-(4n+1)}) = F_{4n+1}$

$2025 = 4 \cdot 506 + 1$

二、非選題：(每題 10 分，共 20 分。請用黑色或藍色原子筆寫在答案卷上，須詳細過程，否則酌予扣分)

Q. 某學生解一道題目「已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3n+2} = 5$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-a_n}{2a_n+3}$ 。」解法如下：

因為 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3n+2} = 5$ ，所以 $a_n = 5(3n+2) = 15n+10$ ，

故所求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-a_n}{2a_n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-(15n+10)}{2(15n+10)+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-11n-10}{30n+23} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-11-\frac{10}{n}}{30+\frac{23}{n}} = \frac{-11-0}{30+0} = \frac{-11}{30}$

Counterexample

$a_n = 15n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n/n}{3+\frac{2}{n}} = 5 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 15$

問該學生解法過程有無錯誤？若有，請指出錯誤與如何對學生說明，並給出正確解法。若無，請給出另一種做法。

一維：直線上 n 个点，最多將此直線分割成 $1+n$ 个区域

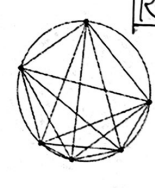
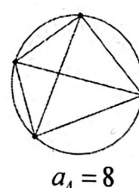
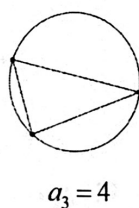
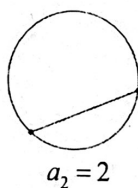
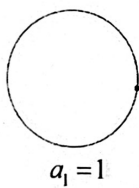
二維：初始+直線數+交點數： $1+C_1^n+C_2^n$

三維：初始+平面數+交線數+交點數： $1+C_1^n+C_2^n+C_3^n$

多一个点，維面 $\Rightarrow$ 多一个区域

$\frac{4 - \frac{a_n}{n}}{2\frac{a_n}{n} + \frac{3}{n}} \rightarrow \frac{-11}{30}$

R. 在翰林版課本第二冊數列級數的單元中提到，一個圓上有 n 個點互相連成線段之後，將圓的內部分割成最多 a_n 個區域：



初+弦+圓交
始+數+內
 $1+C_2^n+C_4^n$

$a_6 = 1+15+15 = 31$

某生在觀察前五項的規律之後，推測一般式 $a_n = 2^{n-1}$ ，試問此結果正確還是錯誤？若正確請證明；若錯誤，請找出正確的一般式，並解釋之。

凸 n 邊形的對角線： $1+C_2^n+C_4^n$

平面上 n 点

圓 $2+2C_2^n$
橢圓 $2+4C_2^n$
三角形 $2+6C_2^n$

