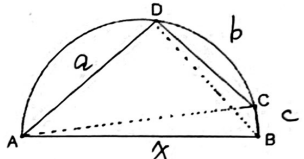


H. 令 m, n 為正整數，且 m, n 滿足 $\frac{m+n}{1+mn} = \frac{1}{64}$ ，試求 $\log_{\sqrt{2}}(m+n)$ 之最小值為_____。

16 $mn - 64(m+n) + 1 = 0 \Rightarrow (m-64)(n-64) = 4095 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
 H $63 \cdot 65 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} 256 = 16$

I. 一個半圓裡有個四邊形 $ABCD$ ，其中 $\overline{AB}$ 為直徑，且 $\overline{BC} = 2$ ， $\overline{CD} = 9$ ， $\overline{AD} = 12$ ，求 $\overline{AB}$ 的長度為_____。

16 $\sqrt{x^2 - a^2} \sqrt{x^2 - c^2} = xb + ac$ $x^3 - 229x - 432 = 0, x > 2$
 I $\Rightarrow x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0$ $\hookrightarrow 16 \cdot 9 \cdot 3, \text{ try } 16$
 $\frac{1+0-229-432}{1+16+27} = \frac{-659}{44} \neq 0$ $x = 16 \text{ or } -8 \pm \sqrt{39} \left(\frac{x}{c} < 0 \right)$



J. 如圖， I 為 $\triangle ABC$ 之內心， $\overline{IQ} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{IP} \parallel \overline{AC}$ ，若 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AC} = 12$ ， $\overline{BC} = 9$ ，試求 $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} =$ _____。

$\frac{113}{2}$ 送分

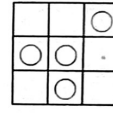
K. 在 3×3 方格紙的 9 個小格中心隨機選取 4 個分別標記一個記號 $\bigcirc$ 。考慮任一格，若其緊鄰的小格(不含自己)恰有 2 格被標記，則得一分，累計 9 小格的總得分數為隨機變數 X ，例：如圖，左下、中、上、右四小格各得 1 分，此時 $X = 4$ 。試求 $E(X) =$ _____。

18
 7
 K
 the piano

角	邊	角
邊	中	邊
角	邊	角

得分
 中心格 $C_2^4 C_2^5 = 60$
 角落格 $C_2^2 C_2^7 \cdot 4 = 84$
 邊緣格 $C_2^3 C_2^6 \cdot 4 = 180$

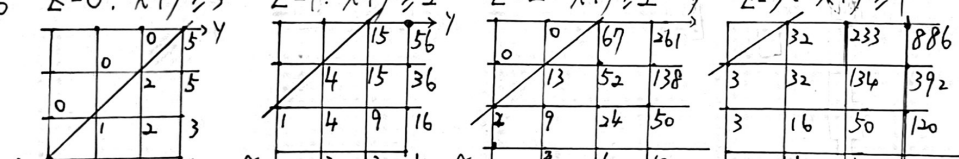
$\frac{324}{9 \cdot 876} = \frac{18}{7}$



L. 空間坐標系中，欲從點 $A(3,0,0)$ 走捷徑前往點 $B(0,3,3)$ ，每次都只能沿著平行 x 軸、 y 軸或 z 軸的方向移動一個單位。試問在不觸及平面 $E: 2x + 2y + z = 4$ 的條件下，一共有_____種走法。

886
 L

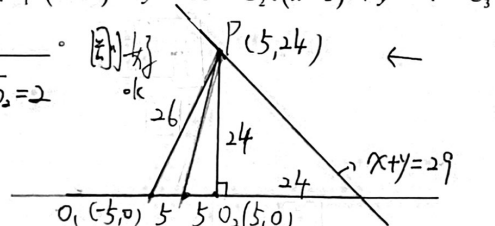
$Z=0: x+y \geq 3$ $Z=1: x+y \geq 2$ $Z=2: x+y \geq 1$ $Z=3: x+y \geq 0$



M. 平面坐標上有三個圓 $C_1: (x+5)^2 + y^2 = 16$ 、 $C_2: (x-5)^2 + y^2 = 4$ 、 $C_3: (x-29)^2 + (y-24)^2 = 4$ ，試問同時與此三個圓外切的圓心坐標為_____。

(5, 24)
 M

$\overline{PO_1} - \overline{PO_2} = 2$



$\begin{cases} \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{24} = 1 \\ x+y=29 \end{cases}$
 $23x^2 + 58x - 865 = 0$
 $23 \quad +173 \quad -5$

N. 已知兩三次函數 $f(x) = x^3 - x$ 與 $g(x) = (x-1)^3 - (x-1) + 2$ 的圖形有三條公切線，其中兩條公切線方程式分別為 $y = ax + b$ 、 $y = ax + c$ ，求 $abc =$ _____。

-8
 N

令 $p(t, t^3 - t)$ $m = 3t^2 - 1 = 2$ $\frac{y}{x} = \frac{2x-2}{x-1} = 2$
 $t = 1$ $\Rightarrow y = 2x - 2$
 $\text{or } -1 \Rightarrow y = 2x + 2$
 (兩平行公切線)

說明 $f(x) = ax^3 + px \rightarrow g(x) = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$
 $p(t, at^3 + pt)$ $m = 3at^2 + p = 3as^2 + p \Rightarrow t^2 = s^2$
 $Q(h+s, as^3 + ps + k)$ 當 $s = t$, $m = \frac{k}{h}$ 滿足 $f'(-x) = f'(x)$
 $\hookrightarrow (t+h, f(t)+k)$ $(f(-x) = -f(x))$