

國立臺灣師範大學附屬高級中學 115 學年度第 1 次專任教師甄選數學科筆試 (題目卷 P1)

一、選填題：(每題 5 分，共 80 分。填在答案卷上，分數或根式須以最簡形式回答，否則不予計分)

2026. 7. 23 (四) ~ 7. 30 (四) R_u

A. 已知 211 為 20 位數，計算出其值等於 51090942171709ab0000，其中 $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ，則 $(a, b) =$ _____。

(4, 4)
[A] $\begin{cases} 9 | \square \\ 11 | \square \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 | (a+b+55) \\ 11 | a+(1-(b-44)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+1 \equiv 0 \pmod{9} \\ a-b \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$
 $\Rightarrow a=b=4$

B. 遊戲公司宣稱某稀有卡片每次能抽取到的機率達 2%，A 玩家不太認同，要進行合理性的檢定，選定幾何分布連續抽取到該稀有卡片為止，並決定顯著水準為 0.01 後，得到拒絕域為區間 $[n, \infty)$ ，其中 n 為自然數，則 $n =$ _____。

229 $\alpha\text{-risk} = P(\text{type I error}) \quad H_0: p \geq 0.02 \quad \alpha\text{-risk} = P(X \geq n | p = 0.02) \leq 0.01 \quad X \sim \text{Geo}(p=0.02)$
[B] $P\{(X_1, \dots, X_n) \in C | H_0\}$ vs. $H_1: p < 0.02 \Rightarrow (0.98)^{n-1} \leq 0.01 \Rightarrow 100 \leq \left(\frac{100}{98}\right)^{n-1}$

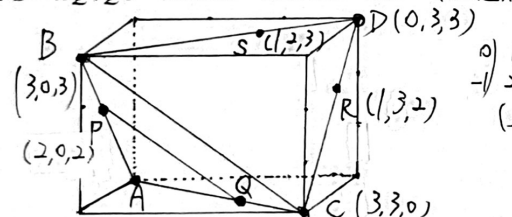
C. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} =$ _____。
 $\frac{\pi}{4} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$
[C] $\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

D. 平面上， O 為原點，在 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的兩條漸近線上分別取點 A, B ，使得 $\overline{OA} \times \overline{OB} = 150$ 。若 P 為 $\overline{AB}$ 中點，且 P 點的軌跡方程式為 _____。

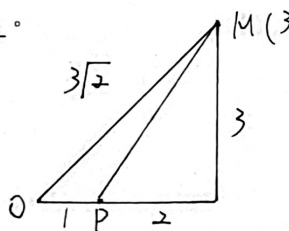
程式為 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = q$ 及 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = r$ ，則 $qr =$ _____。
-36
[D] $L: 3x \pm 4y = 0 \Rightarrow 25|st| = 150 \quad \begin{cases} x = 2(s+t) \\ y = \frac{3}{2}(s-t) \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4 \cdot 4} - \frac{y^2}{\frac{9}{4} \cdot 4} = \pm 6$
 $\Rightarrow st = \pm 6 \quad \Rightarrow -36$
令 $A(4s, 3s), B(4t, -3t)$

E. 設 $ABCD$ 為正四面體，若 P, Q, S, R 分別為稜邊 $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{DB}, \overline{DC}$ 上的分點，滿足

$\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC} = \overline{BS} : \overline{SD} = \overline{CR} : \overline{RD} = 2 : 1$ ，令四邊形 $PQRS$ 與 $\triangle BCD$ 所夾的兩面角為 θ ，試求 $\cos \theta =$ _____。

$\pm \frac{5}{\sqrt{33}}$
[E] 
 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_2 \Rightarrow \pm \frac{5}{\sqrt{33}}$

F. 設 $A(2, 1, -2), B(4, -1, -4)$ 為空間兩點，原點 $O(0, 0, 0)$ 與 $P(x, y, z)$ 在平面 $E: 2x + 2y - z = 0$ 上且滿足 $\overline{OP} = 1$ ，試求 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 的最小值為 _____。

32
[F] 
 $2(3 + 4 + 9) = 32$

G. 設三角函數 $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^3 x + \cos^3 x + \sin^2 x + \cos^2 x$ ，令 $f(x)$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，試求 $M - m =$ _____。

$\frac{3+\sqrt{2}}{2}$
[G] $\begin{cases} S+C=t \\ SC=\frac{t^2-1}{2} \end{cases} \quad g(t) = -\frac{1}{2}(t^4+t^3-2t^2-3t-3) \quad g'(t) = 4t^3+3t^2-4t-3$
 $g(1)=3, g(-1)=1, g(\frac{3}{4})=\frac{507}{512}, g(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3+\sqrt{2}}{2}, g(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$
 $\frac{4+3-4-3}{4+7+3+0} = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$