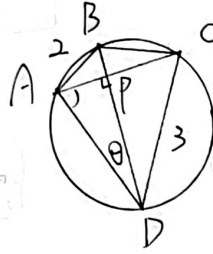


臺北市立麗山高級中學 115 學年度第一次正式教師甄選數學科試題

11. 圓上有四點  $A, B, C, D$ ，已知兩弦  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ，設  $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{CD} = 3$ ，則此圓面積為\_\_\_\_\_。

$\frac{13\pi}{4}$  11



$$\frac{2}{\sin \theta} = \frac{3}{\cos \theta} = 2R$$

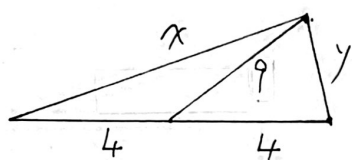
$$\Rightarrow \frac{13}{4R^2} \Rightarrow \pi R^2 = \frac{13\pi}{4}$$

( $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 4R^2$ )  
 pf: 注:  $\frac{u}{\sin \theta} = \frac{v}{\cos \theta} = 2R$   
 $\Rightarrow \frac{u^2 + v^2}{4R^2} \Rightarrow \sim \#$   
 ( $\overline{AB} = u, \overline{CD} = v$ )

12. 等軸雙曲線  $x^2 - y^2 = 8$  的中心為  $O$ ，兩焦點  $F_1, F_2$ ，點  $P$  在此雙曲線上，若  $\overline{PO} = 9$ ，則線段乘積  $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2}$

$81$  = \_\_\_\_\_。

12



$$4 \times 8 = (x-y)^2 = 2(8+16) - 2xy$$

$$\Rightarrow xy = 81$$

13. 如附圖之蜂房結構，每兩個相鄰的蜂房間都有一通道，一隻蜜蜂從蜂房  $A$  出發，想爬到第 10 號蜂房，但不許反向倒走（即蜂房號碼不可愈走愈小），則共有\_\_\_\_\_種走法。

$89$



13

|       |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |
|-------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| $n$   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| $a_n$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 |

14. 設數列  $\{a_n\}$  滿足  $a_{n+1} = a_n + 2^n$ ，且  $a_1 = 1$ ，則  $\frac{1}{a_1 \times a_2} + \frac{2}{a_2 \times a_3} + \frac{2^2}{a_3 \times a_4} + \dots + \frac{2^9}{a_{10} \times a_{11}} =$ \_\_\_\_\_。

$\frac{1023}{2047}$

14

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}, \quad k = \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \text{ (不動點)}$$

$$\frac{a_n - 2^n}{2^n} = \frac{a_n}{2^n} - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow a_n = 2^n - 1$$

$$\frac{2^{k-1}}{(2^k - 1)(2^{k+1} - 1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^k - 1} - \frac{1}{2^{k+1} - 1} \right) \Rightarrow \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2^{10} - 1} \right) = \frac{1023}{2047}$$

# 臺北市立麗山高級中學 115 學年度第一次正式教師甄選數學科試題

## 二、計算證明題 (3 題，每題 10 分)

1. 實驗室中有  $n$  個砝碼，重量分別為  $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。已知從中任取兩個砝碼秤重的重量和為  $A_i$ ，所有  $A_i$  的總和為  $k$  克；  
 600 從中任取三個砝碼秤重的重量和為  $B_i$ ，所有  $B_i$  的總和為  $2k$  克。若已知這些砝碼重量滿足  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$  的最小值為 2400，試求  $k$  的值。

$$\begin{aligned} \text{I} \quad C_{n-1}^1 (a_1 + \dots + a_n) &= k \\ C_{n-1}^2 (a_1 + \dots + a_n) &= 2k \\ \Rightarrow 2 &= \frac{n-2}{2} \Rightarrow n=6 \\ \Rightarrow (a_1 + \dots + a_n) &= \frac{k}{5} \end{aligned}$$

$$(a_1^2 + \dots + a_6^2)(1^2 + \dots + 1^2) \geq \frac{k}{5} \cdot \frac{k}{5} = 2400 \cdot 6$$

$$\Rightarrow k = 600$$

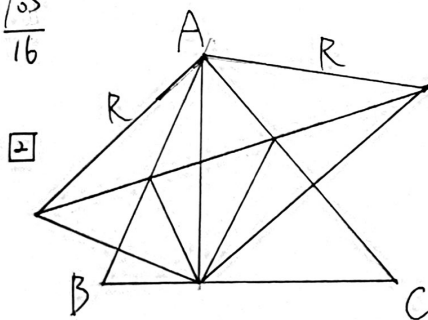
2. 三角形  $ABC$  三邊邊長  $\overline{AB}=4$ 、 $\overline{BC}=6$ 、 $\overline{AC}=5$ ，則

5/7 4 (1)  $\overline{BC}$  邊上的高  $\overline{AH} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(3 分)

法格乃諾問題 Fagnano's Problem  $\min = a \cos A + b \cos B + c \cos C$

- (2) 在  $\overline{AB}$  邊上取一動點  $P$ 、在  $\overline{AC}$  邊上取一動點  $Q$ ，則  $\Delta PQH$  周長的最小值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(7 分)

105/16



(1)  $\cos B = \frac{36+16-25}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{9}{16} \Rightarrow 4 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16} = \frac{5\sqrt{7}}{4}$

(2)  $R^2(2 - 2 \cdot \cos(2A)) = 4R^2 \sin^2 A$

$\cos A = \frac{5}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8} \Rightarrow 2 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{105}{16}$

3. 設  $x_1, x_2, \dots, x_n$  為一組實數資料，其平均數為  $\mu$ ，全距為  $R = \max_{1 \leq i \leq n} x_i - \min_{1 \leq i \leq n} x_i$

(1) 證明對任意實數  $a$ ，有  $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$ 。(5 分)

(2) 設此組資料的標準差為  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$ ，利用(1)證明  $\sigma \leq \frac{R}{2}$ 。(5 分)

3 (1)  $\sum (x_i - a)^2 = \sum (x_i - \mu + \mu - a)^2 = \sum (x_i - \mu)^2 + n(\mu - a)^2 + 2(\mu - a) \sum (x_i - \mu)$

(2)  $|x_i - \frac{M+m}{2}| \leq \frac{M-m}{2} = \frac{R}{2} \Rightarrow \sum (x_i - \mu)^2 \leq \sum (x_i - \frac{M+m}{2})^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot n \Rightarrow \sigma \leq \frac{R}{2}$