

數學科目卷 2026.7.15(三) Ru

注意：請將答案書寫於作答卷，並標明題號

一、填充題 (15 題，每題 5 分，合計 75 分)

1、求 $f(x) = x^{15} + 3x^{10} - x^5 - 2$ 除以 $x^4 - x^2$ 之餘式為？

3x²-2

$$x^{15} \equiv x^{4 \times 4 - 1} \equiv x^{2 \times 2 - 1} \equiv x^3 \pmod{x^4 - x^2}$$

$$x^{10} \equiv x^{4 \times 3 - 2} \equiv x^4 \equiv x^2 \pmod{x^4 - x^2}$$

$$x^5 \equiv x^{4+1} \equiv x^3 \pmod{x^4 - x^2}$$

2、求 $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{13 \times 14 \times 15} = ?$

26/105

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$$

3、等差數列 $\{a_n\}$ ，公差為 3，若 $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{a_n \times a_{n+1}} = \frac{1}{42}$ ，求首項？

2

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+3}} \right) \Rightarrow 3a_5 = 42 \Rightarrow a_5 = 14$$

4、一級數：1+2+2+3+3+3+4+4+4+4+...+第 120 項，求此級數的和？

1240

$$1+2+\dots+15 = 120 \quad \frac{15 \times 16}{2} = 120$$

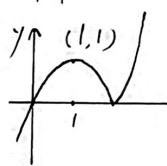
5、設 $x^3 + ax^2 + 2x - 1$ 與 $x^3 + bx^2 + 1$ 之最高公因式為二次式，試求序對 $(a, b) = ?$

$$(-2, 0) \quad \left(\frac{b-a}{2} x^2 - x + 1 \right) (x-1) \Rightarrow 2 = \square + 1 \Rightarrow \frac{b-a}{2} = 1, a = -1 - (-2) \Rightarrow b = 0$$

6、設 k 為實數，方程式 $|x-2| = k$ 恰有一實數解，則 k 的範圍為？

$$k < 0 \text{ or } k = 1$$

$$x \geq 2: y = (x-2)^2 - 1, x < 2: y = -((x-2)^2 + 1)$$

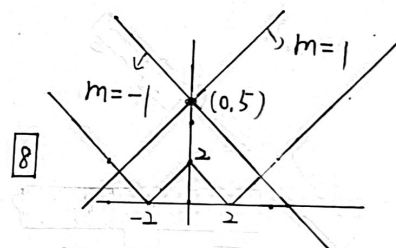


7、設 $x = 1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ ，求 $x^3 - 3x^2 - 6x + 5$ 的值为？

$$(1) (1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})^3 - 3(1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})^2 - 6(1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) + 5 = 4 + 5 = 9$$

8、函数 $f(x) = ||x| - 2|$ 與直線 $y = mx + 5$ 恰相交於一點，則實數 m 的範圍為？

$$m \geq 1 \text{ or } m \leq -1$$

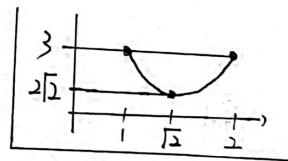


9、設 $a \geq 0, b \geq 0$ 且 $a + b = 1$ ，則 $2^a + 2^b$ 之最大值为 x ，最小值为 y ，求 $x + y$ 為？

$$3 + 2\sqrt{2} \quad (9) 2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2^{a+b}} = 2\sqrt{2} \quad \text{令 } x = 2^a \in [1, 2], f(x) = x + 2x^{-1}, f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}, f''(x) = \frac{4}{x^3} > 0$$

10、指數方程式 $4^x + (m-5) \times 2^{x+1} + (3m-5) = 0$ 有兩相異實根，求 m 的範圍為？

$$\left(\frac{5}{3}, 3 \right) \quad (10) \begin{cases} m > 5 \\ 4(m-5)^2 > 4(3m-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 5/3 \\ m > 0 \text{ or } m < 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{3} < m < 3$$



11、設 $\log x + \log y = 1$ ，求 $x^2 + y^2 - 4(x+y) + 7$ 之最小值？

$$27 - 8\sqrt{10} \quad (11) xy = 10, (x+y)^2 - 4(x+y) - 3 = (x+y-2)^2 - 11, x+y \geq 2\sqrt{10} \Rightarrow 27 - 8\sqrt{10}$$

12、設 $\triangle ABC$ 三邊的高分別為 3、4、6，試求 $\triangle ABC$ 面積？

$$\frac{16\sqrt{15}}{5} \quad (12) \text{ 設 } (a, b, c) = (4t, 3t, 2t) \Rightarrow \Delta = 6t = \left(\frac{9t}{2}, \frac{t}{2}, \frac{3t}{2}, \frac{5t}{2} \right)^2 = \frac{3t^2\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \frac{8 \cdot 6}{\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{5}$$

13、有一曲線 $y^2 = 2x$ ，求點 $A(1, 4)$ 至此曲線之最短距離？

$$\sqrt{5} \quad (13) \text{ 設 } P(x_0, y_0) \Rightarrow y_0 y' = 2 \Rightarrow m_L = \frac{1}{y_0} \Rightarrow m_{AP} = -y_0 = \frac{y_0 - 4}{x_0 - 1} = \frac{2(y_0 - 4)}{y_0^2 - 2} \Rightarrow P(2, 2) \Rightarrow AP = \sqrt{5}$$

14、一長為 10 呎的梯子傾斜靠在一垂直的牆上。已知梯腳以每秒 1 呎的速度向外滑動，則在梯腳離牆 6 呎時，梯頂沿牆向下滑動的速度為何？

$$-\frac{3}{4} \text{ or } \frac{3}{4} \quad (14) x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

15、設 $x > 0$ ，試求 $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 2}$ 的最小值？

$$5 \quad (15) \frac{x^2 + 2x + x + 2 + 9}{x + 2} = x + 2 + \frac{9}{x + 2} \geq 5$$

$$6 \cdot 1 + 8 \cdot \square = 0$$

$-\frac{3}{4}$ (負號表示下滑)

二、教學方案 (1 題，合計 25 分) 主 " = " 成立， $x = 1, k$

依據《十二年國民基本教育課程綱要總綱》，各學習領域於課程設計與教學實施時，應適切融入十九項議