

$(a^2+k, a+\frac{k}{2a})$ $y=\sqrt{x}$ $f'(a^2)=\frac{1}{2a}$ or $\sqrt{a^2+k}=a(1+\frac{k}{a^2})^{\frac{1}{2}} < a(1+\frac{1}{2}\frac{k}{a^2})=a+\frac{k}{2a}$ (Bernoulli's inequality)
 (a^2, a) $(a^2+k, \square)$ $\square = \frac{a(2a+k)+(a+1)k}{2a+1} = a + \frac{k}{2a+1} < \sqrt{a^2+k}$ (Jensen's inequality)

9. 平面上兩向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 夾角為 60 度，已知 $|\vec{a}|=16$ ， $|\vec{b}|=10$ ，若向量 $\vec{c}$ 使得 $\vec{a}-\vec{c}$ 與 $\vec{b}-\vec{c}$ 的夾角為 120 度，求 $|\vec{c}|$ 的最小值為 (全等) 

10. 若 $\sqrt{115^2+1}+\sqrt{115^2+2}+\sqrt{115^2+3}+\dots+\sqrt{115^2+230}=n+\alpha$ ，其中 $n \in \mathbb{N}$ ， $0 \leq \alpha < 1$ ，則 $n=?$
 $a_n = 2(2a_{n-1}-2a_{n-3})-2a_{n-2}=2a_{n-1}-4a_{n-3}$
 $\square \square = 2(2a_{n-3}-2a_{n-4})-4a_{n-3}=-4a_{n-4}$

11. 設數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 對所有 $n \geq 3$ 都滿足 $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ 。
 已知 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 29$ ， $\sum_{n=1}^{20} a_n = 205$ ，求 $a_1 + a_2$ 之值。
 $(a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab+bc+ca + a+b+c + 1$

12. 整數數對 (a, b, c) 滿足 $a \leq b \leq c$ 且 $a+b+c=-1$ ， $a^3+b^3+c^3+10(a+1)(b+1)(c+1)=2001$ ，求 $2a-b+3c=?$
 $Q^3+b^3+c^3=3abc - ((a+b+c)^3 - 3(ab+bc+ca)(a+b+c)) = 3(abc+ab+bc+ca) - 1 \Rightarrow 3(a+1)(b+1)(c+1) = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11$

二、計算題：3 題，每題 10 分，共 30 分。
 【說明】：作答時請將題號標示清楚，寫出演算過程，否則不予計分。

1. 若存在三個相異實數 k 使得 $y=kx+3$ 與 $y=2x^3-6x^2+a$ 相切，求實數 a 的範圍？
 (1) 求實數 a 的範圍？
 (2) 求滿足此條件的整數 a 與有理數 k 所代表的曲線與切線所圍的區域面積為？

2. 在複數平面上，試求曲線 $z^4+z=1$ 與曲線 $|z|=1$ 的交點個數。
 $z = e^{i\theta}$ ， $\Im(z^4+z)=0$ or $|z^4|=|z-1|=1$
 $\Rightarrow \sin 4\theta + \sin \theta = 5(8\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1) = 0$
 $\Rightarrow 2(\sin\theta \cos\theta(2\cos^2\theta - 1)) + \sin\theta = 0$

3. 已知 x, y, z 為正數，滿足 $xy+yz+xz=1$ 且 $3(x+\frac{1}{x})=4(y+\frac{1}{y})=5(z+\frac{1}{z})$ ，求 y 之值？
 $\frac{1}{2} \square \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = 1$
 $\frac{1}{\tan \frac{C}{2}} = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}) = \tan(\frac{A+B}{2}) = \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}}$
 $\triangle ABC$ 