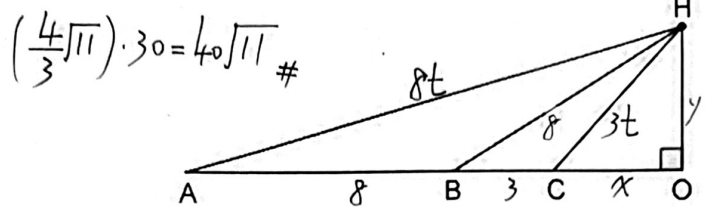


國立中央大學附屬中壢高級中學115學年度第1次教師甄選 數學科筆試題目卷

一、填充題：每題7分，共84分。2026.6.29(-) ~ 7.4(7/1) Ru

1. 如圖，在地平面的三點 A 、 B 、 C ，分別測得大樓 $\overline{OH}$ 樓頂 H 的仰角依序為 θ 、 2θ 、 3θ 。已知 $\overline{AB} = 240$ 公尺，
 $40\sqrt{11}$ $\overline{BC} = 90$ 公尺，求樓高 $\overline{OH}$ 為 _____ 公尺。

$$\begin{aligned} \square \quad 64 &= 24t^2 - 24 \Rightarrow t^2 = \frac{11}{3}, 3t = \sqrt{33} \\ 64 - 33 &= (x+3+x) \cdot 3 \Rightarrow x = \frac{22}{3 \cdot 2} = \frac{11}{3} \\ \Rightarrow y^2 &= 33 - \frac{121}{9} = \frac{176}{9} = 16 \cdot \frac{11}{9} \end{aligned}$$



2. 設 z 為複數且 $|z| = 1$ ，若 $|z^2 + iz + 1|$ 的最大值為 a ，最小值為 b ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\square \quad \left| z + \frac{1}{z} + i \right| = |2C + i| = \sqrt{4C^2 + 1} \in [1, \sqrt{5}]$$

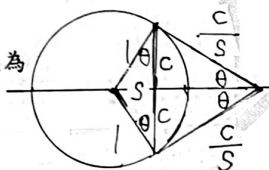
3. 若正數數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = 1$ ，且對於 $n \geq 2$ 時皆滿足 $\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} = \frac{a_n}{2n-1}$ ，其中 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ，
 n^4 則 S_n 的一般項為 _____。

$$\begin{aligned} \square \quad \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} &= 2n-1 & \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} &= 2 \cdot 2 - 1 = 1 & \Rightarrow \sqrt{S_n} &= 2(1 + \dots + n) - n = n^2 \\ \sqrt{S_3} - \sqrt{S_2} &= 2 \cdot 3 - 1 = 5 & & & \Rightarrow S_n &= n^4 \\ \vdots & & & & & \\ \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} &= 2 \cdot n - 1 & & & & \end{aligned}$$

4. 化簡 $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\square \quad \alpha\beta = \left(45^{\frac{1}{3}} - 29^{\frac{1}{3}} \cdot 2 \right)^{\frac{1}{3}} = 7 \quad \Rightarrow x^3 - 2|x - 90| = (x-6)(x^2 + 6x + 15) = 0 \Rightarrow x = 6$$

5. 有個半徑為 1 單位的圓及圓外一點 P ，今由 P 點往此圓作兩條切線可得兩個切點 A 、 B ，
 $\sqrt{2} - 3$ 則 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值為 _____。



$$\begin{aligned} \left(\frac{C}{S} \right)^2 \cos(2\theta) &= \frac{(1-S^2)}{S^2} (1-2S^2) \\ &= 2S^2 + \frac{1}{S^2} - 3 \geq 2\sqrt{2} - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{抽中某球}) &= \frac{C_1^{24}}{C_2^{25}} \\ \downarrow P(\text{成功配對}) \\ \frac{2}{25} \times \left(\frac{4 \times 2}{24} \right) \times (1 + 2 + \dots + 25) \end{aligned}$$

6. 中壢觀光夜市有個遊戲攤位，其遊戲規則如下：

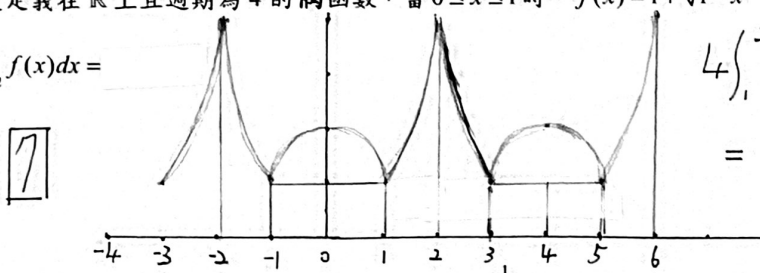
$\frac{26}{3}$ 箱子中有編號 1-25 號的球各 1 顆，假設每顆球被抽到的機會相等，每局遊戲皆由箱中任抽兩球，若兩球的號碼在
 看板上同行或同列，則可以得到球號相對應的獎金！舉例來說，假設抽到 2 號與 17 號便可得 $2+17=19$ 元；倘若
 抽 2 號與 6 號就沒有獎金可以拿。今小馬壢參加此遊戲且只玩一次，則小馬壢所得獎金的期望值為 _____。

$$\begin{aligned} \square \quad E &= \frac{\text{總獎金}}{\text{所有組合數}} = \frac{(1+2+\dots+25) \times 4}{C_2^{25}} \\ &= \frac{26 \cdot 25 \cdot 4}{25 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{26}{3} \end{aligned}$$

同列：每個數有另外 4 个数配對一次
 同行：~

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

7. 設 $f(x)$ 是定義在 $\mathbb{R}$ 上且週期為 4 的偶函數，當 $0 \leq x \leq 1$ 時， $f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}$ ，而當 $2 \leq x \leq 3$ 時， $f(x) = (x-4)^2$ ，
 $\pi + \frac{40}{3}$ 試求： $\int_{-2}^6 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$



$$\begin{aligned} 4 \int_1^2 x^2 dx + 4 + \pi \\ = \frac{40}{3} + \pi \end{aligned}$$

8. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+n^2+n^3+\dots+n^n}{1^n+2^n+3^n+\dots+n^n} = \frac{1}{n^n} \cdot \frac{n(n^n-1)}{n-1} \xrightarrow{\text{分子}} \frac{1-\frac{1}{n^n}}{1-\frac{1}{n}} \Big/ \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \dots + \left(\frac{n-2}{n}\right)^n + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \left(\frac{n}{n}\right)^n$

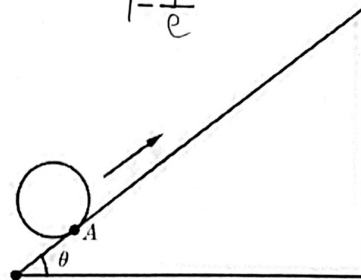
$1 - \frac{1}{e} \quad \left[\left(1 + \frac{1}{\square}\right)^{\square} \rightarrow e \Rightarrow \left(\frac{n-k}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k} \cdot (-k)} \rightarrow e^{-k} \right] \rightarrow \frac{1}{1+e^{-1}+e^{-2}+\dots} = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = 1 - \frac{1}{e}$

9. 有個半徑為 1 單位的圓以每秒 1.5 單位的速度將圓周沿著斜坡等速往上滾動。

已知斜坡角度為 θ 且 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 。設點 A 為開始觀察時圓與斜坡的切點，

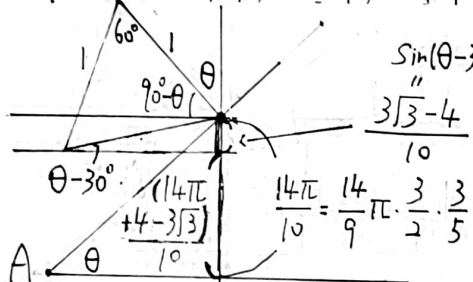
經過 $\frac{14}{9}\pi$ 秒的移動後，點 A 距離地面的高度將增加 _____ 單位。

$\frac{14\pi + 4 - 3\sqrt{3}}{10}$



10. 在平面上，點 $P_2, P_3, \dots, P_6$ 為 $\overline{P_1P_7}$ 的等分點，且 $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \dots = \overline{P_6P_7} = 2$ ， $\overline{AP_1} = 6$ ， $\overline{AP_7} = 8$ ，

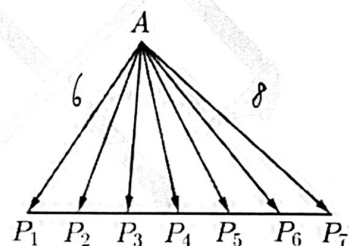
98 試求： $\overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{P_1P_7} + \overrightarrow{AP_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_7} + \overrightarrow{AP_3} \cdot \overrightarrow{P_1P_7} + \dots + \overrightarrow{AP_6} \cdot \overrightarrow{P_1P_7} = \boxed{10}$



$\overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{P_1P_7} + \overrightarrow{AP_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_7} + \dots + \overrightarrow{AP_6} \cdot \overrightarrow{P_1P_7}$

$\left(\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \dots + \overrightarrow{AP_6}\right) \cdot \overrightarrow{P_1P_7}$

$= -7 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{29}{2 \cdot 3 \cdot 6} + 2(0+1+2+\dots+6) \cdot \frac{1}{2} = 7 \cdot 2 \cdot 7 = 98$



11. 如圖，設 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，以 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 分別向外作等腰直角三角形 ABD 、 ACE ，點 M 是 $\overline{BC}$ 中點。

27 若 $\overline{MD} = 8$ ， $\overline{ME} = 6$ ，則 $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$

12 $A(1, 4, 2)$ $M(2, 4, 3)$ $B(3, 4, 4)$

$r^2 = R^2 - (d(O, E))^2$

$B(3, 4, 4) = (t-1)^2 + 4^2 + (-t+3)^2 - 3$

$= 2t^2 - 8t + 56$

$t=2 \Rightarrow 48\pi$

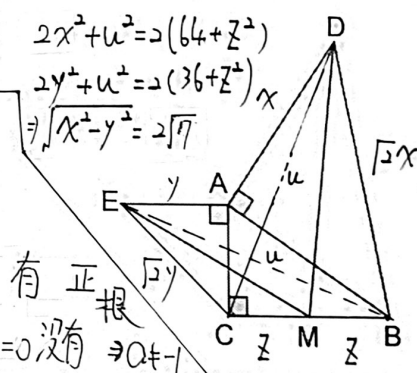
$x+z=5 \Rightarrow O(t, 11, 5-t)$

$\{5x-2y+5z=3\}$

x	$x^2 = x + 0$	$x^3 = x^2 + 0$
0	a	90
1	a	92
-1	a+2	88
-2	a+6	-8/04

$a \mid \gcd(90, 92) = 2$ or $x^2 - x = 0$ 有正根

$\Rightarrow a = \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}, \frac{1}{x}, -\frac{2}{x}$ $x^3 + x + 9 = 0$ 沒有 $\Rightarrow a \neq -1$



12. 空間中有 $A(1, 4, 2)$ 、 $B(3, 4, 4)$ 兩點，球面 S 通過 A 、 B 兩點，其球心 O 在平面 $5x - 2y + 5z = 3$ 上。

48π 若平面 $E: x + y + z = 19$ 截此球面 S 所得之截面面積為 $F(S)$ ，則 $F(S)$ 的最小值為 _____。

$\boxed{11} \quad f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n x^k \Rightarrow b_n = f'(1) = n \cdot 2^{n-1}$

二、計算證明題：每題 8 分，共 16 分。

1. 設數列 $a_n = C_0^n + C_1^n + \dots + C_n^n$ ，其中 $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ，則根據二項式定理可得 a_n 的一般項為 2^n 。

(1) 令 $b_n = 1 \cdot C_1^n + \dots + k \cdot C_k^n + \dots + n \cdot C_n^n$ ，試求 b_n 的一般項。(3 分)

(2) 令 $d_n = 1^2 \cdot C_1^n + \dots + k^2 \cdot C_k^n + \dots + n^2 \cdot C_n^n$ ，試求 d_n 的一般項。(5 分)

2. 設 a 為整數且 $x^{13} + x + 90$ 可分解為 $x^2 - x + a$ 與一個整係數多項式的乘積，則 a 的值為何？(8 分)