

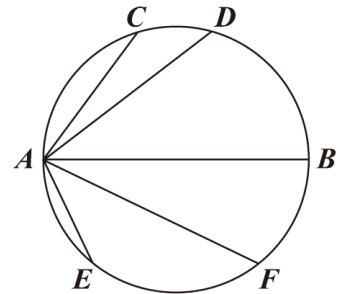
高雄市 115 學年度市立國民中學教師聯合甄選

科目:學科專業科目-數學

說明:本試卷共計 50 題，為四選一單選題(每題 2 分，共 100 分)

1. 已知直角三角形，斜邊上的中線長是 1，問其面積最大是多少呢？
(A) 8 (B) 4 (C) 2 (D) 1
2. 已知 $f(x)$ 是一個三次多項式， $f(1) = 0$ ， $f(2) = 2$ ， $f(-1) = 2$ ， $f(-2) = -6$ ，求 $f(3)$ 的值。
(A) 13 (B) 16 (C) 14 (D) 19

3. 有一直徑為 \overline{AB} 的圓，且圓上有 C, D, E, F 四點，其位置如右圖一所示。若 $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{AD} = 8$ ， $\overline{AE} = 5$ ， $\overline{AF} = 9$ ， $\overline{AB} = 10$ ，則下列弧長關係何者正確？



圖一

- (A) $\widehat{AC} + \widehat{AD} = \widehat{AB}$ ， $\widehat{AE} + \widehat{AF} = \widehat{AB}$
 - (B) $\widehat{AC} + \widehat{AD} = \widehat{AB}$ ， $\widehat{AE} + \widehat{AF} > \widehat{AB}$
 - (C) $\widehat{AC} + \widehat{AD} > \widehat{AB}$ ， $\widehat{AE} + \widehat{AF} > \widehat{AB}$
 - (D) $\widehat{AC} + \widehat{AD} < \widehat{AB}$ ， $\widehat{AE} + \widehat{AF} < \widehat{AB}$
4. 先求 $\frac{6x-2}{x^2+5} + \frac{x^2+5}{6x-2} = 2$ 的所有解，問這些解的和是
(A) -1 (B) 6 (C) 7 (D) 9
 5. 設 a 為正整數且 $1 \leq a \leq 2026$ ，已知 3^{3a+1} 與 a^3 被 5 除的餘數相同，求這樣的 a 共有多少個？
(A) 401 (B) 405 (C) 410 (D) 416
 6. 在直角坐標系中，已知兩定點 $A(-3,3)$ ， $B(2,-4)$ ，且動點 C 落在兩坐標軸上，使得 $\triangle ABC$ 形成直角三角形，則 C 點坐標為有理數的情形有多少種？
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

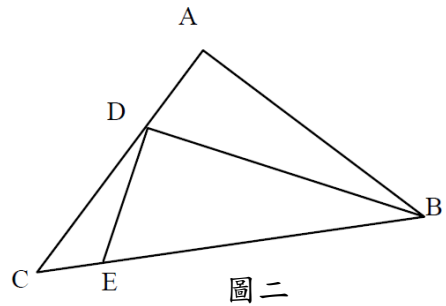


7. 已知 A, B 為樣本空間 S 中的兩個獨立事件，且 $P(A \cup B) = 0.84$ ，則 $P(A \cap B)$ 的最大值為多少？
 (A) 0.36 (B) 0.4 (C) 0.48 (D) 0.6
8. 投擲一個兩面的錢幣直到出現 2 次正面或 2 次反面時才停止投擲，令隨機變數 X 為投擲停止的次數。假設出現正面的機率為 p ，求 X 的期望值為多少？
 (A) $2 - p^2 + 2(1 - p)^2$ (B) $3 - p^2 - (1 - p)^2$
 (C) $2 - p^2 + (1 - p)^2$ (D) $3 + p^2 - 2(1 - p)^2$
9. 若 x, y 皆為任意實數，則 $|x - y - 1| + |x + y| + |y|$ 的最小值為何？
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$

10. 如右圖二，已知 $\overline{AB} = \overline{AC} = 3\overline{AD} = 3$ ，

$\angle BAC = \angle BDE = 90^\circ$ ，則 $\triangle CDE$ 的面積為何？

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$
 (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$



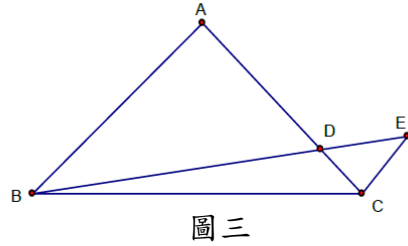
11. 有美國人、英國人與法國人各四人，合計共 12 人，現在玩遊戲需要每兩個人配對成一組，共配對成六組，但相同國籍的人不能在同一組，且此六組不管排列順序，則共有多少種配對方法？
 (A) 864 (B) 1126 (C) 1560 (D) 1728
12. 已知四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ， \overline{AC} 平分 $\angle BCD$ ， E 為四邊形 $ABCD$ 中兩條對角線的交點。若 $\overline{CD} = \overline{AE}$ ， $\overline{BC} = \overline{DE}$ ，則 $\angle ABC - \angle BAD = ?$
 (A) 48° (B) 54° (C) 64° (D) 72°
13. 設 a, b, c, d 為四個兩兩不相等的實數，且 $(a + c)(a + d) = (b + c)(b + d) = 2$ ，求 $(a + c)(b + c) = ?$
 (A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4



14. 一副 52 張的撲克牌經任意洗牌後，牌面向下，然後一張一張翻開，當第一次出現的牌點數為 5 時，緊接著下一張牌仍出現點數 5 的機率為 $\frac{a}{b}$ (a, b 為兩互質的正整數)，求 $a + b = ?$
 (A) 50 (B) 51 (C) 52 (D) 53
15. 若級數和滿足 $\frac{1^2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + \frac{3^2}{5 \times 7} + \cdots + \frac{2026^2}{4051 \times 4053} = 2027 \times \frac{q}{p}$ ，其中 p, q 互質，則 $p - q = ?$
 (A) 2026 (B) 3040 (C) 4053 (D) 5200
16. 過點 $P(1, 1)$ 作直線 $x + ay + b = 0$ ，使得它被橢圓 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 所截出的弦，其中點恰為點 P ，求 $a - b = ?$
 (A) $\frac{11}{2}$ (B) $\frac{13}{2}$ (C) $\frac{11}{4}$ (D) $\frac{13}{4}$
17. 設 A, B 為 $y = x^2$ 上的兩點，若 \overline{AB} 的中垂線方程式為 $y = -x + 2$ ，則 \overline{AB} 的直線方程式為 $x + ay + b = 0$ ，求 $a + 2b = ?$
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
18. 把 900 分解成兩個正整數的乘積，若 ab, ba 看作同一種，問有幾種不同的分解呢？
 (A) 27 (B) 14 (C) 26 (D) 9
19. 已知 a, b, c, d 為等比數列的連續四項，且滿足 $a > b > c > d$ 。若 $a^{80} = b^m = c^n = d^{120}$ ，則 $n - m = ?$
 (A) 12 (B) $\frac{90}{7}$ (C) $\frac{63}{4}$ (D) 16
20. 在 $\triangle ABC$ 中作 $\angle A$ 的角平分線交於底邊 \overline{BC} 於點 D ，若 $\overline{AB} = 5, \overline{AC} = 4, \angle A = 60^\circ$ ，求 $\overline{AD} = ?$
 (A) $\frac{19\sqrt{3}}{6}$ (B) $\frac{17\sqrt{3}}{7}$ (C) $\frac{21\sqrt{3}}{8}$ (D) $\frac{20\sqrt{3}}{9}$



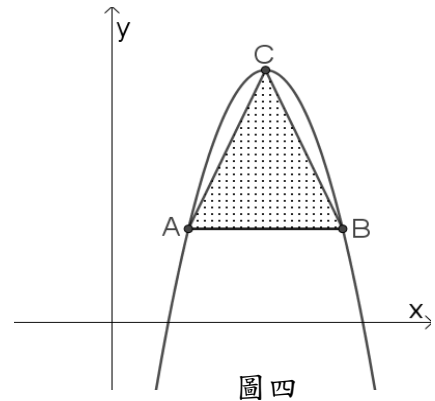
21. 如右圖三， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，
 $\angle BAC = 2\angle BEC$ ， \overline{BE} 與 \overline{AC} 交於 D 。
 已知 $\overline{AC} = 5$ ， $\overline{AD} = 3$ ，則
 $\overline{BD} \times \overline{BE} = ?$
 (A) 8 (B) 12
 (C) 15 (D) 16



22. 已知菱形 $ABCD$ 的邊長為 10， M 在 \overline{BC} 上，且 $\overline{BM} = 4$ 。今在 \overline{BD} 上取一點 P 使得 $\overline{PC} + \overline{PM}$ 有最小值，則菱形 $ABCD$ 面積是 $\triangle ABP$ 面積的多少倍？
 (A) $\frac{5}{2}$ (B) 5 (C) $\frac{17}{3}$ (D) 7
23. 實數 x, y, z 滿足 $x + y + z = 5$ ， $xy + yz + zx = 3$ ，當 $x = a$ ， $y = b$ 時， z 有最大值為 c ，求 $a + 2b + 3c = ?$
 (A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18

24. 設 $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin 3x$ 的最小值為 k ，求 $k^2 = ?$
 (A) $\frac{22}{9}$ (B) $\frac{25}{9}$ (C) $\frac{64}{27}$ (D) $\frac{68}{27}$

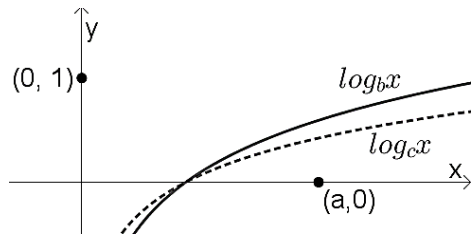
25. 圖四，曲線為二次函數 $y = -3(x-a)^2 + b$ 示意圖，其中 C 為頂點且 \overline{AB} 平行於 x 軸，已知 $\overline{AB} = 4$ ，則 $\triangle ABC$ 之面積為
 (A) 6
 (B) 12
 (C) 18
 (D) 24



26. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = c$ ， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{CA} = b$ ，且 $c > b$ ，給定下列 4 組選項中的數，哪一組數無法對應唯一的三角形？
 (A) $a, b, \sin C$ (B) $a, c, \sin A$
 (C) $a, b, \cos C$ (D) $b, c, \cos A$

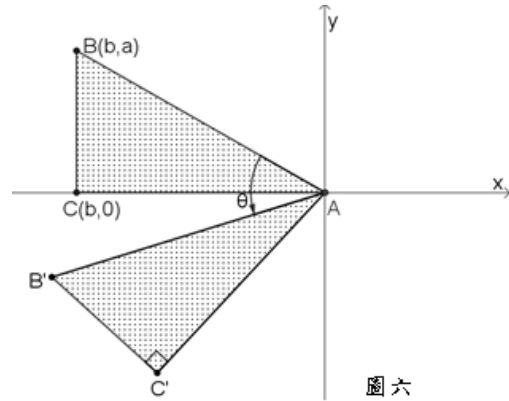


27. 圖五中， $(a,0)$ 為 x 軸上一點，兩曲線分別為 $y = \log_b x$ 和 $y = \log_c x$ ，此圖乃根據實際比例繪製，試比較 a, b, c 三實數的大小
- (A) $a > b > c$ (B) $a < b < c$
 (C) $a < c < b$ (D) $c < a < b$



圖五

28. 圖六中 $\triangle ABC$ 為一直角三角形，其中 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $B(b, a)$ ， $C(b, 0)$ ，以 A 為中心將 $\triangle ABC$ 逆時針轉 θ 角後點 B 的位置來到 B' ，則 B' 的 y 坐標為
- (A) $a \sin \theta + b \cos \theta$
 (B) $a \sin \theta - b \cos \theta$
 (C) $a \cos \theta - b \sin \theta$
 (D) $a \cos \theta + b \sin \theta$



圖六

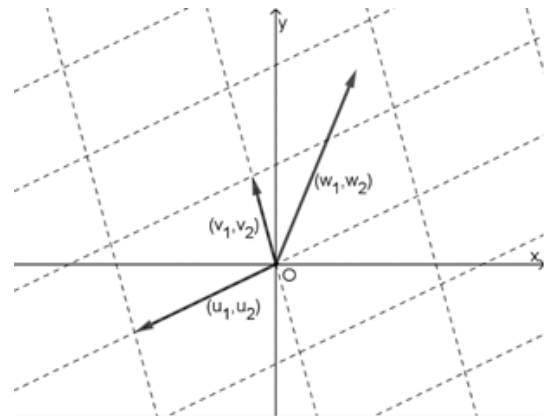
29. 設實數對 (a, b) 使得方程式 $2x^2 + (a + 3)x + b - 3 = 0$ 與 $x^2 + ax + b = 0$ 各有兩整數根，求這樣的 (a, b) 共有多少個？
- (A) 0 (B) 2 (C) 6 (D) 無限多個
30. 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長均為整數， M 為 \overline{AB} 的中點。令 $p = \overline{AC} + \overline{AM}$ ， $q = \overline{BC} + \overline{BM}$ ，若 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，且 $p:q = 5:2$ ，則當 $\triangle ABC$ 的面積有最小值時， $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為何？
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{399}}{42}$ (C) $\frac{\sqrt{399}}{40}$ (D) $\frac{\sqrt{343}}{21}$
31. 數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ (n 為大於 2 的正整數)，求 $[a_{30} + 0.6]$ 之值為多少？(符號 $[x]$ 為不大於 x 的最大整數)
- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9
32. 若實矩陣 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ， $B^2 - AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，則 $a + d =$
- (A) 0 (B) 4 (C) 8 (D) -4



33. 如圖七， $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ， $\vec{v} = (v_1, v_2)$ ， $\vec{w} = (w_1, w_2)$ ，則下列何者正確？

(A) $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} > 0$ (B) $\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix} < 0$

(C) $\frac{\begin{vmatrix} w_1 & v_1 \\ w_2 & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}} > 0$ (D) $\frac{\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}} < 0$



圖七

34. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor}{n} =$

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) 1 (C) 0 (D) 不存在

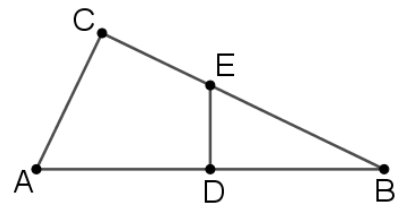
35. 平面上，曲線 $x^2 + xy + y^2 = 7$ ，在 $(2, 1)$ 的切線為

- (A) $x - 2y = 0$ (B) $x + 2y - 4 = 0$
 (C) $5x + 4y - 14 = 0$ (D) $2x - y - 3 = 0$

36. 如圖八， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， \overline{AB} 的中垂線

分別交 \overline{AB} 、 \overline{AC} 於 D 、 E 兩點， $\overline{AC} = 8$ ，試問 $\overline{ED} \cdot \overline{AC}$ 之值為何？

- (A) $-8\sqrt{2}$ (B) -16
 (C) -32 (D) 16



圖八

37. 若 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是 $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 5 & b & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 的特徵向量，求 $a + b =$

- (A) 0 (B) 7 (C) 5 (D) -4

38. 已知直角坐標平面上兩點 $A(\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$ 與 $B(\sin 50^\circ, \cos 50^\circ)$ ，求直線 AB 的斜率

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$



39. 已知三角形 ABC 三邊長分別為 $a^2 - 1$ ， $2a + 1$ ， $a^2 + a + 1$ ，而此三角形最大角的度數為 A ，求 $\cos^2 A + \csc^2 A = ?$

- (A) $\frac{13}{12}$ (B) $\frac{15}{12}$ (C) $\frac{17}{12}$ (D) $\frac{19}{12}$

40. 試求微分方程式 $xy' + 2y = 4x^2$ ， $y(1) = 4$ ， $x \in (0, \infty)$ 的解。

- (A) $3x^2 + x^{-1}$ (B) $3x + x^{-2}$ (C) $3x^2 + x^{-2}$ (D) $x^2 + 3x^{-2}$

41. 若 $a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k+n}$ ，求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 等於

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) e^3 (C) $\ln 3$ (D) $\ln 2$

42. 若 θ 為任意實數，函數 $f(\theta) = 8 \sin^3 \theta - 6 \sin \theta + 2$ ，求 $f(\theta)$ 的最大值。

- (A) 8 (B) 4 (C) 0 (D) -1

43. 求積分 $\int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2} dx$ 等於

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

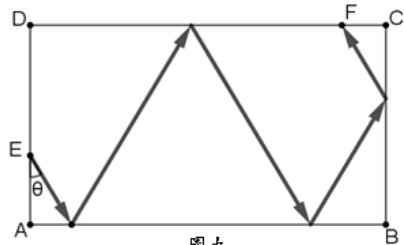
44. 求積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta$ 等於

- (A) 1 (B) -2 (C) 2 (D) 0

45. 求瑕積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$ 等於

- (A) 0 (B) 5 (C) -5 (D) 20

46. 一電腦螢幕如圖九之長方形 $ABCD$ ，長 $\overline{AB} = 16$ ，寬 $\overline{AD} = 9$ ，它的螢幕保護程式圖形是一個直線行進的亮點，碰到螢幕邊緣後就反射往另一方向繼續直線前進，在螢幕中反覆不斷地遊走。設亮點一開始的位置在 E 點， $\overline{AE} = 2$ 且與邊緣夾角為 θ 並往右下前進，它的行進路線如圖中箭頭所示，反射 4 次後打到 \overline{CD} 邊上的 F 點，則 \overline{CF} 的長度為



圖九

- (A) $22 \sin \theta - 9$ (B) $14 - 7 \sec \theta$
 (C) $29 \tan \theta - 16$ (D) $\frac{16}{\tan \theta} - 20$



47. 本學期期末數學月考中，甲班 50 人的平均分數為 65 分，標準差為 4 分；乙班 50 人的平均分數亦為 65 分，標準差為 3 分。若將這兩組考生成績標準化後合併為一個 100 人的大組，試問合併後的標準差
- (A) 12.5 (B) 3.5 (C) $\sqrt{12.5}$ (D) 1
48. 設 $f(x)$ 是一個三次實係數多項式，且滿足恆等式 $f(x)+f(2026-x)=115$ 對任意實數 x 皆成立。則 $f(\frac{x}{2})$ 圖形的對稱中心為
- (A) $(\frac{1013}{2}, \frac{115}{2})$ (B) $(1013, \frac{115}{2})$
- (C) $(2026, \frac{115}{2})$ (D) $(4056, \frac{115}{2})$
49. 設 $\triangle ABC$ 的三邊長分別為 a, b, c 。若 $\triangle ABC$ 面積為 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$ ，求 $\tan C =$
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 不存在
50. 考慮複數平面， i 是虛數，對於任意複數 z ，定義 $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ ，下面那個不是 $\cos z = 2$ 的解呢？
- (A) $2\pi + i \ln(2 + \sqrt{3})$ (B) $i \ln(2 + \sqrt{3})$
- (C) $i \ln(2 - \sqrt{3})$ (D) $\pi + i \ln(2 - \sqrt{3})$

