

以下題目共 40 題，為四選一單選選擇題(每題 2.5 分，共 100 分)

1. 求曲面 $\sqrt{x} + y^3 + \sqrt{z} = 4$ 在其上一點 $(4, 1, 1)$ 上的切平面方程式為何？
(A) $x + 12y + z = 17$
(B) $x + 12y + 2z = 18$
(C) $x + y + 12z = 17$
(D) $x + 2y + 12z = 18$
2. 設 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 為矩陣 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的三個特徵值(eigenvalues)，則 $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = ?$
(A) 32
(B) 33
(C) 34
(D) 35
3. 設 $x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ ，則 $x^3 + 3x + 2$ 之值為何？
(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
4. 下列何者不是 11 的倍數？
(A) $24^{100} - 1$
(B) $3^{90} - 1$
(C) $63^{34} - 4$
(D) $17^{48} + 4$
5. 設年利率為 8%，若依複利計算，則至少要 n 年(取整數年數)本利和才會超過本金的 3 倍。求 $n = ?$
($\log 2 = 0.301, \log 3 = 0.477$)
(A) 14
(B) 15
(C) 16
(D) 17
6. 設點 $A(3, 0)$ ， P 為雙曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上任一點，則 \overline{AP} 之最小值為何？
(A) $\sqrt{3.2}$
(B) $\sqrt{3.3}$
(C) $\sqrt{3.4}$
(D) $\sqrt{3.5}$
7. 橢圓的參數方程式 $\begin{cases} x = -3 + 5 \cos \theta \\ y = 4 + 3 \sin \theta \end{cases}$ (θ 為參數)，則它的焦點坐標可能為何？
(A) $(-7, 4)$
(B) $(3, 4)$
(C) $(-3, 0)$
(D) $(-3, 8)$
8. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $2 \cos A \sin B = \sin C$ ，則 $\triangle ABC$ 一定是何種三角形？
(A) 等邊三角形
(B) 直角三角形
(C) 等腰直角三角形
(D) 等腰三角形

9. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) = ?$

- (A) 1
- (B) $\ln 2$
- (C) 2
- (D) $\ln 3$

10. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = ?$

- (A) 1
- (B) $\frac{1}{2}$
- (C) $\frac{1}{3}$
- (D) $\frac{1}{4}$

11. 兩個向量 \vec{a} 、 \vec{b} 滿足 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 1$ 、 $|2\vec{a} + \vec{b}| = 2$ ，則 $6\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2$ 的值為何？

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 6
- (D) 9

12. 已知 $f(x) = \frac{2-x}{1-2x}$ ，定義 $f_1(x) = f(x)$ 、 $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ ，則 $f_{10}(x) = ?$

- (A) $\frac{2-x}{1-2x}$
- (B) $\frac{1-2x}{2-x}$
- (C) $\frac{x-1}{x}$
- (D) x

13. 滿足 $\sqrt{1 + \sqrt{x}} = \sqrt[3]{x-1}$ 的實數解有幾個？

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

14. 關於導數(derivatives)與微分的性質，下列敘述何者正確？

- (A) 若函數 $f(x)$ 可微分，則 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的導數為 $\frac{-1}{(f(x))^2}$
- (B) 若 $f(x) = xe^2$ ，則 $f'(x) = e^2 + 2xe$
- (C) 若 $f(x) = |x^3 + 2x|$ ，則 $f'(x) = |3x^2 + 2|$
- (D) 若 $f(x) = \tan^2 x$ 且 $g(x) = \sec^2 x$ ，則 $f'(x) = g'(x)$

15. 關於定積分與反導數(antiderivatives)的性質，下列敘述何者正確？

- (A) 若 f 為連續函數，則 $\int_3^x f(t) dt$ 的最小值發生在 $x=3$ 處
- (B) 若 f 為連續函數，則 $\int_x^{x+2} f(t) dt$ 之值必為與 x 無關之常數
- (C) 若 $\int_1^4 f(t) dt = 12$ ，則函數 f 在閉區間 $[1,4]$ 上的平均值為 4
- (D) 偶函數(even functions)的反導數必為奇函數(odd functions)

16. 設級數 $S = 3 + 3 \times 5 + 3 \times 5^2 + \dots + 3 \times 5^{12}$ ，則下列何者正確？

- (A) S 為 10 位數，個位數為 6
- (B) S 為 10 位數，個位數為 3
- (C) S 為 9 位數，個位數為 2
- (D) S 為 9 位數，個位數為 3

17. 已知圓 $x^2 + y^2 + 4x + ky + m = 0$ 與直線 $2x - 3y = 7$ 相切於點 $(1, -1)$ ，則 $2k + m = ?$

- (A) -27
- (B) -21
- (C) -15
- (D) 2

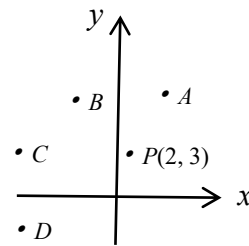
18. 某城市有一種傳染病的診斷方法，根據過去的醫學經驗得知：確定染病的人經檢查被確診為患病的可能性為 70%；而健康的人經檢查卻被誤診為患病的可能性為 10%。已知該城市中實際患有此疾病的人口比例為 2%。若從該城市中隨機抽取一人進行檢測，請問該診斷方法對全體市民所造成的「誤診率」（即檢測結果與實際患病情況不符的機率）為多少？
- (A) 10.4%
(B) 12%
(C) 30.6%
(D) 40%

19. 設 A 與 B 皆為 3×3 的方陣，已知 A 的行列式值為 -7 ， B 的行列式值為 $\frac{1}{2}$ ，試求矩陣 $-3A^T B^{-1}$ 的行列式值為何？
- (A) -378
(B) 378
(C) $\frac{63}{2}$
(D) 42

20. 設 $f(x)$ 為一個三次多項式，若 $y=f(x)$ 的圖形通過平面上的四個點： $(-3, 120)$ 、 $(-2, 51)$ 、 $(3, -24)$ 與 $(4, -69)$ ，則此多項式的三次項係數為何？
- (A) -2
(B) 5
(C) -6
(D) 3

21. 有一數列 $a_1 + 3$ ， $a_2 + 6$ ， $a_3 + 9$ ，……， $a_9 + 27$ ， $a_{10} + 30$ 共計 10 項，其和為 295。求 $\sum_{k=1}^{10} a_k + 4k$ 之值為何？
- (A) 130
(B) 350
(C) 360
(D) 370

22. 如圖(一)，設 m 為實數，若 P 點的坐標為 $(2, 3)$ 。下列選項中，哪一個點坐標代入二元一次方程式 $y - 3 = m \times (x - 2)$ 後，所得之 m 值最小？
- (A) A 點
(B) B 點
(C) C 點
(D) D 點



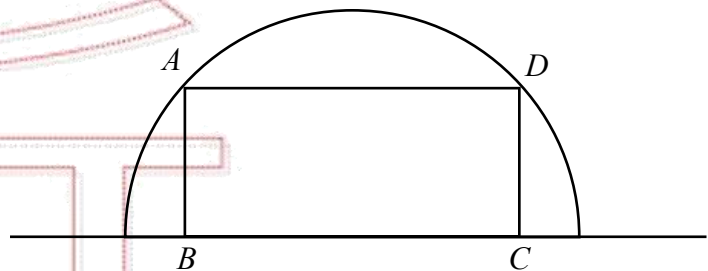
圖(一)

23. 若 a, b, k 為實數， $a(x^2 - 4xy + 5y^2 - y) + b(3x^2 - 3y^2 + x) + 12xy - 38x + 12y + k = 0$ 的圖形為一個圓且圓半徑為 2。關於此圖形的敘述，四位學生提出說明如下：
- 甲說： a 的值為 2， b 的值為 3
- 乙說：此圓的圓心是 $(2, -\frac{1}{2})$
- 丙說： $k = \frac{1}{4}$
- 丁說： $k = \frac{9}{4}$
- 請問：誰提出的說明正確？
- (A) 只有甲和乙
(B) 只有甲和丙
(C) 只有乙和丁
(D) 只有甲、乙和丁

24. 坐標空間中有三個相異平面 E_1, E_2, E_3 皆通過 $(-1, 2, 0)$ 與 $(1, 1, 1)$ 兩點。坐標空間中另有甲 $(2, -1, 1)$ 、乙 $(3, 0, 2)$ 、丙 $(-3, 3, 1)$ 、丁 $(21, -9, 11)$ 四點。請問下列哪些點也同時在此三平面上？
- (A) 只有甲和乙
(B) 只有乙和丙
(C) 只有乙和丁
(D) 只有丙和丁

25. 如圖(二)，有一矩形 $ABCD$ 內接於一個直徑為 4 的半圓形內。
求此矩形的最大面積為何？

- (A) $2\sqrt{2}$
(B) 4
(C) $4\sqrt{2}$
(D) 5



圖(二)

26. 若方程式 $|x^2 + 3x + 2| = k$ 恰有兩個實數解，此時 k 的值為何？

- (A) $k > 0$
(B) $0 < k < \frac{1}{4}$
(C) $k = 0$ 或 $k > \frac{1}{4}$
(D) $k = \frac{1}{4}$

27. 正整數 $1 \sim 2026$ 中，無論除以 $\frac{5}{2}$ 、除以 $\frac{7}{4}$ 或除以 $\frac{9}{6}$ 後，結果仍然是整數的共有多少個？

- (A) 6 個
(B) 7 個
(C) 19 個
(D) 20 個

28. 設函數 $h(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$ ，求 $h\left(\frac{1}{2027}\right) + h\left(\frac{2}{2027}\right) + \dots + h\left(\frac{2025}{2027}\right) + h\left(\frac{2026}{2027}\right) = ?$

- (A) 2027
(B) 2026
(C) 1014
(D) 1013

29. 求 $f(x) = \sin^2 x \cos x$ 的最大值 = ?

- (A) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$
(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
(D) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

30. 已知函數 f 滿足 $f\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = x$ ，求 $f'(3) = ?$

- (A) 1
(B) $\frac{1}{2}$
(C) $\frac{1}{3}$
(D) $\frac{1}{4}$

31. 若 $y = 3 \tan x - 2 \csc x$ ，則 $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 最接近下列哪一個整數？

- (A) 13
(B) 14
(C) 15
(D) 16

32. 設 $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ ，且 $f(m) = \frac{1}{5}$ ， $f(n) = \frac{1}{6}$ ，求 $f(m+n) = ?$

- (A) $\frac{11}{30}$
(B) $\frac{12}{30}$
(C) $\frac{11}{31}$
(D) $\frac{12}{31}$

33. 化簡 $\tan(\sin^{-1}\frac{8}{17}) = ?$

- (A) $\frac{15}{8}$
- (B) $\frac{17}{8}$
- (C) $\frac{8}{15}$
- (D) $\frac{15}{17}$

34. 求極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin x} = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (C) $\frac{1}{2}$
- (D) 0

35. 假設 V 是一個實數的內積空間，且讓 $v_1, v_2 \in V$ 。已知 $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = 1$ ，則 $\|v_1 + v_2\| = ?$

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 4

36. 方程式 $(4 \cos x \sin x + 1)(\sin^2 x + \cos x + 1) = 0$ 在區間 $[0, 2\pi]$ 裡有幾個解？

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 5
- (D) 6

37. 下列哪個多項式沒有實數根？

- (A) $x^2 + x - 1 = 0$
- (B) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$
- (C) $x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0$
- (D) $x^5 + x + 1 = 0$

38. 若 $f(x) = \cos x + \sin x$ ，則 $f^{(1051)} = ?$

- (A) $\sin x + \cos x$
- (B) $\sin x - \cos x$
- (C) $-\sin x + \cos x$
- (D) $-\sin x - \cos x$

39. 下列哪個數字最大？

- (A) 10^{100}
- (B) 5^{150}
- (C) π^{200}
- (D) 2^{300}

40. 下列哪個函數的圖形對原點對稱？

- (A) $\sin(x^3 - x)$
- (B) $\cos(\sin x)$
- (C) $10^{\frac{1}{x}}$
- (D) $\log_2|x|$

新

聞

用

請式

是頁