第二部份 :計算證明題 (每題 10 分，共 40 分) 115松山高中

1. 設 $f(x)$ 為一定義在非零實數上的實數值函數，已知極限 $\lim_{x\to0} f(x)\frac{|x|}{x}$ 存在，試判斷下列選項是否正確？若是請證明之，若否請舉反例並驗證之。

√ (1) $\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{|x|}\right)^2$ 存在

(1) $\lim_{x\to0^-}\left(\frac{x}{|x|}\right)^2=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{|x|}\right)^2=1$

(2) $\frac{x}{|x|}=\frac{|x|}{x}=sgn(x)$ ( Signum function )

√ (2) $\lim_{x\to0} f(x)\frac{x}{|x|}$ 存在

(4) 設 $\lim_{x\to0} f(x)\frac{|x|}{x}=L \Rightarrow \lim_{x\to0^+} f(x)\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^+} f(x)=L$

$\lim_{x\to0^-} f(x)\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^-} f(x)(-1)=L$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=L\neq -L=\lim_{x\to0^-} f(x)$

X (3) $\lim_{x\to0}(f(x)+1)\frac{x}{|x|}$ 存在　反例可取 $\frac{|x|}{x}$

(3) 須留意 $\lim_{x\to0}(f(x)+1)\frac{x}{|x|}$ 及 $\lim_{x\to0}\frac{x}{|x|}$ 為不存在

因此過程中不可寫出

$\lim_{x\to0}(f(x)+1)\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0} f(x)\frac{x}{|x|}+\lim_{x\to0}\frac{x}{|x|}$

X (4) $\lim_{x\to0} f(x)$ 存在　反例可取 $\frac{|x|}{x}$

√ (5) $\lim_{x\to0}(f(x))^2$ 存在　證明略

(5) $\lim_{x\to0^+} f(x)\cdot f(x)=L^2=(-L)^2=\lim_{x\to0^-} f(x)f(x)$

2. 試利用極限的 $\varepsilon$-$\delta$ 定義，證明 $\lim_{x\to3}x^2=9$。

可取 $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{7}\}$

$\boxed{2}$ $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{7}\}>0$

s.t. if $0<|x-3|<\delta$

then: since $\delta\le1$, we have $6-\delta<x+3<6+\delta$

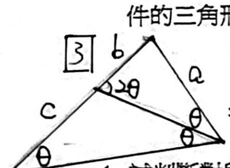
$\Rightarrow |x+3|<7$

$\Rightarrow |x^2-9|=|x-3||x+3|<|x-3|\cdot7\le\frac{\varepsilon}{7}\cdot7=\varepsilon$

3. 設 $\Delta ABC$ 的三邊長 $a,b,c$ 均為小於 100 正整數，已知 $\angle A=2\angle B$ 且此三角形的周長為 231，試求滿足題目所述條件的三角形之三邊長分別為何?

令 $d=(b+c,b)$ $\Rightarrow a=uvd$ $\Rightarrow u(u+v)d=3\cdot7\cdot11$, $(u,u+v)=(u,v)=1$

$\boxed{3}$




$\frac{a}{b}=\frac{b+c}{a}$　設 $b+c=u^2d$　$b=v^2d$　$u<u+v<u+u=2u$

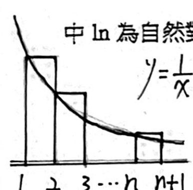
$\Rightarrow a^2=b(b+c)$　$b=v^2d,\ (u,v)=1$　$c=(u^2-v^2)d$　$\Rightarrow u^2<u(u+v)\le231 \Rightarrow u\le11$

$(84,48,99)$

| $u$ | $u+v$ | $2u$ | $v$ | $d$ | $a$ | $b$ | $c$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | 2 | | | | | | |
| 3 | x | 6 | | | | | | |
| 7 | 11 | 14 | 4 | 3 | 84 | 48 | 99 | ok |
| 11 | 21 | 22 | 10 | 1 | 110 | 100 | 21 | 不合 |

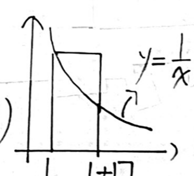
4. 試判斷對所有自然數 $n$，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$ 和 $\ln(n+1)$ 之間的大小關係，並運用數學歸納法加以證明。(其中 ln 為自然對數)

$\boxed{4}$




$y=\frac{1}{x}$　左式 $>\int_1^{n+1}\frac{1}{x}=\ln(n+1)$

$\square>\int_1^{1+\square}\frac{1}{x}dx=\ln(1+\square)$




$\Rightarrow \frac{1}{k+1}>\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$

⇑

or $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}<e \Rightarrow (k+1)\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)<1$

當 $n=1$, $1>\ln(2)$ ok

設 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}>\ln(k+1)$

則 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$

$>\ln(k+1)+\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\ln(k+2)$ #