臺北市立松山高中 115 學年度第一次正式教師甄選初試
數學科 筆試試題卷

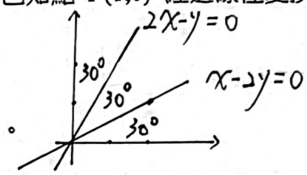
★請於答案卷上標明題號並作答。填充題僅須簡答，計算證明題須有完整之過程

2026.6.22(一) ~ 6.28(日) Ru

第一部分：填充題(每題 5 分，共 60 分)

10

1. 坐標平面上，設區域 R 表示由聯立不等式 $\begin{cases} x-2y\le 0 \\ 2x-y\ge 0 \end{cases}$ 可行解所形成的區域，已知點 $P(1,0)$ 經過線性變換矩陣 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$ 連續變換 n 次後落在區域 R，試求最小可能正整數 n。



$\boxed{1}$ $\downarrow$ $R(75°)$ $\quad \frac{2\pi}{12}+2k\pi \le \frac{5n}{12}\pi \le \frac{4\pi}{12}+2k\pi$

$5n \equiv \square \pmod{24}$ $\quad 2\le\square\le 4$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$5n$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$\square$	5	10	15	20	1	6	11	16	21	2

34

2. 已知正整數 $a,b\in\{1,2,3,4,5,6\}$ 且不等式 $|x-a|+|x-b|\le 4$ 有實數解 x，試問這樣的正整數對 (a,b) 有多少個？

$\boxed{2}$ $|a-b|\le 4$ $\quad$ 不合： $\begin{matrix} a & b \\ 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{matrix}$ $\quad 36-2=34$

$2\sqrt{2}$

3. 坐標平面上，有三個點 $A(-1,0), B(1,0), P(\cos\theta,\sin\theta)$，其中 $0<\theta<\pi$。

又 P 點在 x 軸上的投影點為點 C，且點 D 不在 x 軸上。已知可以將 $\overrightarrow{DC}$ 寫成 $\overrightarrow{DA}$ 和 $\overrightarrow{DB}$ 的線性組合

$\overrightarrow{DC}=a\overrightarrow{DA}+2a\overrightarrow{DB}$，試求 $\tan\theta=$？

$\boxed{3}$ $(\cos\theta-x,y)=\frac{1}{3}(-1-x,-y)+\frac{2}{3}(1-x,-y) \Rightarrow$ 3, $2\sqrt{2}$, 1, θ $\Rightarrow 2\sqrt{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

4. 坐標空間中，設直線 L_1: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{-1}$，直線 L_2: $\begin{cases} 2x-3y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$，試求兩歪斜線 L_1 和 L_2 的距離。

$\boxed{4}$ $\begin{matrix} 2 & -3 & -1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ & 4 & 1 & 5 & & \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} 4 & 1 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & -3 & -1 \\ & 14 & 14 & -14 & & \end{matrix}$ $\quad A(1,2,1)$, $B(0,0,0)$, $\vec{n}=(1,1,-1)$ $\quad \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{35}}{2}i$

5. 設虛數 z 滿足 $|z|=3$，且在複數平面上 1、z、z^3 共線，試求 $z=$？

$\boxed{5}$ $z=3e^{i\theta}$ $\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z^3-z}{z-1}\right)=0$ or π $\quad z^3-z=k(z-1),\ k\in\mathbb{R} \Rightarrow 0=\mathrm{Im}(z^2+z+1)$ $\quad 3\left(-\frac{1}{6}\pm\frac{\sqrt{35}}{6}i\right)$

or $\vec{u}\parallel\vec{v} \Rightarrow \exists k\in\mathbb{R} \ni \vec{u}=k\vec{v} \Rightarrow 9\cdot 2SC+3S=3S(6C+1)=0$ $\quad =-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{35}i}{2}$

$4\pi+3\pi^2$

6. 設 $y=\sin x+2$ 的圖形、$y=\sin x+1$ 的圖形與直線 $x=0$、直線 $x=\pi$ 所圍成的區域繞 x 軸旋轉所得的旋轉體為 S，試求旋轉體 S 的體積。

$\boxed{6}$ $(S+2)^2-(S+1)^2$ $\quad \pi\int_0^\pi(2\sin x+3)\,dx=\pi\left(-2\cos x\Big|_0^\pi+3x\right)=\pi(4+3\pi)$

7. 魔術師在魔術表演中將寫有數字 1 至 100 的 100 張相異數字的牌分別放入紅、藍、綠三個盒子中，且每個盒子都至少有一張牌。觀眾從任意兩個不同的盒子中各取出一張牌，並將這兩張牌上的數字和告訴魔術師。問共有 <u>12</u> 種放牌的方法，使得魔術師在任何情況下都能正確判斷出哪一個盒子沒有被選中？

$\boxed{7}$ $3k$　$3k+1$　$3k+2$　1　0　2　(mod 3)

1　2, 3, … 99　100　3~100　102–199　101

$3!+3!=12$

8. 甲、乙兩人依"甲乙甲乙…"的順序輪流擲一公正硬幣，規定擲出正面者得 1 分，反面得 0 分。在已知擲完第三次時(甲和乙總共投擲三次)，甲得分領先乙的條件下，則擲完第六次時，甲與乙最後總得分相等的機率為 <u>$\frac{5}{16}$</u>。

$\boxed{8}$ $\dfrac{\frac{10}{2^6}}{\frac{4}{2^3}}=\frac{5}{16}$

甲乙甲乙甲乙

甲	乙	甲	乙
1	0	0	1
		1	2
2	1	0	1
		1	2
2	0	0	2

$C^2_1C^1_0(C^1_0C^2_1+C^1_1C^2_2)=6$

$C^2_2C^1_1(\quad\sim\quad)=3$

$C^2_2C^1_0C^1_0C^2_2=1$

$\cdots$和$=4$

9. 已知 a,b,c,d 為 $x^4+x^3+1=0$ 的四個根，求 $\begin{vmatrix}a&1&1&1\\1&b&1&1\\1&1&c&1\\1&1&1&d\end{vmatrix}$ 之值為 <u>-4</u>。

$\boxed{9}$ $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$

$\begin{vmatrix}a&1&1&1\\1-a&b-1&0&0\\0&1-b&c-1&0\\0&0&1-c&d-1\end{vmatrix}=(a-1+1)(b-1)(c-1)(d-1)+(a-1)\begin{vmatrix}1&1&1\\1-b&c-1&0\\0&1-c&d-1\end{vmatrix}$

$=(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)\left(1+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{d-1}\right)=f(1)\left(1-\frac{f'(1)}{f(1)}\right)$

$=3\left(1-\frac{7}{3}\right)=-4$

10. 若兩實數 α 與 β 滿足方程組 $\begin{cases}\alpha^3-6\alpha^2+13\alpha-2030=0\\\beta^3+15\beta^2+76\beta+2150=0\end{cases}$，則 $\alpha+\beta$ 之值為 <u>-3</u>。

$1-6+13-2030 \,|\, 2$
$+2-8+10$
$1-4+5 \,|\, -2020$
$+2-4$
$1-2+1$

$1+15+76+2150 \,|\, -5$
$-5-50-130$
$1+10+26 \,|\, +2020$
$-5-25$
$1+5+1$

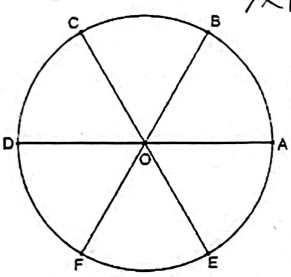
$f(x)=(x-2)^3+(x-2)-2020$

$g(x)=(x+5)^3+(x+5)+2020$

$(-5,2020)$　$-5-\Delta=\beta$　$2+\Delta=\alpha$　$(2,-2020)$

$\alpha+\beta=-3$

11. 若使用紅、黃、藍三種顏色著下圖六個扇形區域，滿足著紅色的區域與著藍色的區域不相鄰，則有 <u>199</u> 種著色方法。



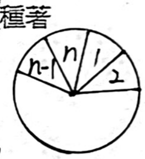
$\boxed{11}$ 法1：沒有R：2^6，沒有B：2^6，$128-1=127$ 6个Y

R	B	Y	排法
1	1	4	$6\cdot3=18$
1	2	3	$6\cdot C^3_2=18$
2	1	3	18
2	2	2	6
3	1	2	6
1	3	2	6

和$=199$

法2：$f_n\equiv n$个区域直線排列之排法

$a_n\equiv$ ~ 环状 ~



$a_n=f_n-f_{n-2}+1$ ←全黃

or $\begin{matrix}1&n\\b&r\\r&b\end{matrix}$　$f_{n-1}=y_n$

$f_n=r_n+y_n+b_n=(r_{n-1}+y_{n-1})+\boxed{(r_{n-1}+y_{n-1}+b_{n-1})}+(b_{n-1}+y_{n-1})$

$\Rightarrow f_n=2f_{n-1}+f_{n-2}$

$r_1=1 \rightarrow r_2=2$
$y_1=1 \rightarrow y_2=3$
$b_1=1$　$b_2=2$
$\Rightarrow f_1=3$　$f_2=7$

n	1	2	3	4	5	6
f_n	3	7	17	41	99	239

$a_6=f_6-f_4+1=199$

12. 已知一個五位數 N(10000~99999，共計 90000 個數字)，若此五位數 N 包含至少一個數字 3，且恰為 3 的倍數，例如:63396,12360,66603,33333，則此種五位數 N 共有 <u>12504</u> 個可能值。

$\boxed{12}$ $3k$：0, 3, 6, 9　$3k+1$：1, 4, 7　$3k+2$：2, 5, 8

$\_\ \overset{0}{\underset{9}{\wr}}\ \overset{0}{\underset{9}{\wr}}\ \overset{0}{\underset{9}{\wr}}\ 3$　$3\cdot10\cdot10\cdot10\cdot1$　3000

$\_\ \overset{0}{\underset{9}{\wr}}\ \overset{0}{\underset{9}{\wr}}\ 3\ \cancel{3}$　$3\cdot10\cdot10\cdot1\cdot9$　2700

$\_\ \overset{0}{\underset{9}{\wr}}\ 3\ \cancel{3}\ \cancel{3}$　$3\cdot10\cdot1\cdot9\cdot9$　2430

$\_\ 3\ \cancel{3}\ \cancel{3}\ \cancel{3}$　$3\cdot1\cdot9\cdot9\cdot9$　2187

$3\ \_\ \cancel{3}\ \cancel{3}\ \cancel{3}$　$1\cdot3\cdot9\cdot9\cdot9$　2187

和$=12504$