高雄中學 115 年正式教師甄選數學科試題

2026.6.13(六)～6.21(日) Ru

※本份試卷共有 15 大題，每題皆為計算或證明題。

1. 方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$，

$\boxed{1}$ 設 E_1, E_2 交於 $L_1 \Rightarrow \begin{cases} \vec{n_1} \perp L_1 \\ \vec{n_2} \perp L_1 \end{cases} \Rightarrow L_2 \,/\!/\, L_1 \,/\!/\, \vec{n_1}\times\vec{n_2}$

$E_2, E_3 \sim L_2 \Rightarrow \vec{n_3} \perp L_2 \Rightarrow |\Delta| = \left|\vec{n_3}\cdot(\vec{n_1}\times\vec{n_2})\right| = 0$

令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$。

設 $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$
在 $\Delta=0$ 且
三平面兩兩不平行
的前提下
方程組為無限多解
幾何意義 三平面共線 ><

試證：若方程組之幾何意義為「三平面兩兩相交於一直線，且三直線互相平行」，

則 $\Delta=0$ 且 Δ_x、Δ_y、Δ_z 至少有一不為 0。（6 分）

2. 針對本題：

$[-8,13]$

「$f(x)$ 是一個多項式函數，$\deg f(x)=1$，$1\le f(1)\le 4$，$-2\le f(2)\le 7$，求 $f(3)$ 之範圍」。

請用兩種不同解法，求出本題的正確答案。(8 分)

$\boxed{2}$ 法1 Lagrange 插值法 設 $f(x)=\frac{x-2}{1-2}f(1)+\frac{x-1}{2-1}f(2)$
$\Rightarrow f(3)=-f(1)+2f(2)\in[-8,13]$

法2: $f(1), f(2), f(3)$ 成 A.P. $\Rightarrow f(3)=-f(1)+2f(2)$

法3: 設 $f(x)=ax+b \Rightarrow \cdots$

3. 已知 $f(x)=\left(3x^5+2x^4-4x-2\right)^{115}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{115}x^{115}$

可能有誤

若 $p=\sum_{k=0}^{57}a_{2k}$，$q=\sum_{k=0}^{57}(-1)^k a_{2k}$，$r=\sum_{k=0}^{28}a_{4k+1}$，$s=\sum_{k=0}^{28}a_{4k+3}$，試求數對 (p,q,r,s)。（8 分）

$x^n(x^2-2x+1)$

4. $a_n=\int_0^1 x^n(1-x)^2\,dx, n=1,2,3,\ldots$，試求（1）$\sum_{k=1}^{n}a_k$　（2）$\lim_{n\to\infty} n^3\cdot a_n$。（6 分）

(1) $\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}$　(2) 2

$\boxed{4}$ (1) $a_k=\frac{1}{k+3}-\frac{2}{k+2}+\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}-\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)$
$=\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}$

$\boxed{4}$ (2) $(n+1)(n+2)-2(n+1)(n+3)+(n+2)(n+3)$
⇓分子
$\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}\cdot n^3 \longrightarrow 2$

5. 已知三角形 ABC 的三邊長分別為 a,b,c，且其外接圓半徑 $R=\frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$，

$\sqrt{2}$

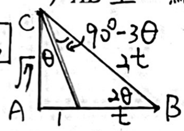
求此三角形三內角的餘弦值之和=?（6 分）

$\boxed{5}$ $\sin A=\frac{b+c}{2\sqrt{bc}}\ge 1$　$b=c$
$\Rightarrow \sin A=1$，$\angle A=90^\circ$，$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2=\sqrt{2}$

6. 直角 ΔABC 中，$\angle BAC=90^\circ$，今 $\overline{AB}$ 上一點 D 滿足 $\angle ABC=2\angle ACD$ 且 $\overline{BC}=2\overline{BD}$，若 $\overline{AD}=1$

$\sqrt{7}$

求 ΔBCD 面積=?（6 分）

$\boxed{6}$ 

$\frac{1}{2}=\frac{\sin(90^\circ-3\theta)}{\sin(90^\circ-\theta)}=4c^2-3 \Rightarrow c=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$

$3t^2-2t-8=0$
$\begin{matrix} 3 & +4 \\ 1 & -2 \end{matrix} \Rightarrow t=2 \Rightarrow \Delta=\sqrt{7}$

7. 設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均為二次實係數多項式且 $f(x)$ 的領導係數為 1，$g(x)$ 的領導係數為 4，

若 $(f(x))^2$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $\frac{11x-15}{4}$；$(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $28x-40$，求 $f(x)=$?（6 分）

$x^2-\frac{17}{4}x+\frac{65}{16}$

$\boxed{7}$ 設 $4f(x)=g(x)+Ax+B$

$16(f(x))^2=g(x)Q_1(x)+(Ax+B)^2 \rightarrow = g(x)\cdot\frac{A^2}{4}+44x-60$ -①

$(g(x))^2=f(x)Q_2(x)+(Ax+B)^2 \rightarrow = f(x)\cdot A^2+28x-40$ -②

②-①: $\left(f(x)-\frac{1}{4}g(x)\right)A^2$
$=\frac{Ax+B}{4}\cdot A^2=16x-20$
$\Rightarrow A=4$, $B=-5$，代回②
$f(x)=\frac{1}{16}\left((4x-5)^2-(28x-40)\right)$
$=x^2-\frac{17}{4}x+\frac{65}{16}$