新竹市立建功高中115年第一次正式教師甄選【高中數學】試題卷

一、填充題：(每題5分，共75分)

2026.6.7(日)～6.13(六) Ru

1. 建功高中全體教師中，有10%具博士學位，40%具碩士學位，其餘為學士學位。已知學士學位教師中有 30% 通過英文檢定，碩士學位教師中有60%通過英文檢定，博士學位全數通過英文檢定。今隨機抽選一位已通過英文檢定的教師，則該教師具碩士學位的條件機率為 ______。(化為最簡分數)

$\frac{24}{49}$

$\boxed{1}$ $\frac{4\cdot 6}{1\cdot 10+4\cdot 6+5\cdot 3}=\frac{24}{49}$

2. 建功高中辦理科展，由7位數學老師、6位自然老師與2位資訊老師共15人中，選出8人分成兩組擔任指導老師，每組各4人。若規定每組都恰有1位數學老師，且都至少有1位自然老師，則共有________種分組方式。

11760

$\boxed{2}$ $C^7_2\cdot 2!\ C^8_3C^5_3/2!=11760$

3. 設正四面體 ABCD 中，頂點$A(3,2,0)$，且底面△BCD所在平面為$2x+3y+6z+2=0$，求此正四面體的體積= _____。

$\sqrt{3}$

$\boxed{3}$ $h=\sqrt{6}a/3=14/7=2 \Rightarrow \sqrt{2}a^3/12=\sqrt{2}\cdot 6\cdot\sqrt{6}/12=\sqrt{3}$

4. 坐標平面上，已知二次函數圖形Γ：$y=f(x)$的頂點P在直線$2x+y+2=0$上，且交x軸於點$A(-1,0)$，$B(1,0)$。將Γ平移使得平移後圖形的頂點Q仍在直線$2x+y+2=0$上，且亦通過點$B(1,0)$，此時P、Q為兩相異點，則$\overline{PQ}$=

$3\sqrt{5}$

$\boxed{4}$ $P(0,-2)\Rightarrow f(x)=2(x+1)(x-1)$ 設$Q(t,-2t-2)\Rightarrow g(x)=2(x-t)^2-2t-2$, $g(1)=0\Rightarrow(t-1)^2=t+1 \Rightarrow t=3 \Rightarrow \overline{PQ}=3\sqrt{5}$

5. 已知$f(x)$為實係數三次多項式，且$f(1-i)=3$，$f(0)=-3$，$f(2)=3$。若方程式 $x^2f(x)+12=3x^2+f(x)$ 的五個根分別為 a、b、c、d、e，試求$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$=

6

$\boxed{5}$ 令 $g(x)=f(x)-3=(\quad)(x^2-2x+2)(x-2)$ $\Rightarrow f(0)-6=(\frac{3}{2})(-4)$ $\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}(x^3-4x^2+6x-2)\Rightarrow(x^2-1)(\frac{3}{2}(x^3-4x^2+6x-2))=3(x^2-4)$ $\Rightarrow x^5-4x^4+5x^3\cdots=0 \Rightarrow 16-2\cdot 5=6$

6. 在ΔABC中，已知$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，則$\Delta ABC$最大角的正弦值為________。

$\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\boxed{6}$ $bc\cdot\cos A=2ac\cdot\cos B=3ab\cos C\Rightarrow\frac{1}{\tan A}=\frac{2}{\tan B}=\frac{3}{\tan C}$，令$(\tan A,\tan B,\tan C)=(t,2t,3t)$ (Vieta's formulas) $\Rightarrow t+2t+3t=t(2t)(3t)\Rightarrow 3t=3$, $\sin C=\frac{3}{\sqrt{10}}$

7. 已知$a>b>1$，若$\log_a b+\log_b a=\frac{5}{2}$，則$\frac{b}{a+4}$的最大值為________

$\frac{1}{4}$

$\boxed{7}$ 令 $t=\log_b a\Rightarrow 2t^2-5t+2=0\Rightarrow\log_b a=2\Rightarrow\frac{1}{b+4/b}\le\frac{1}{4}$ $(a=4,b=2)$

8. 已知z_1,z_2是互為共軛的複數，若$|z_1-z_2|=4\sqrt{3}$，$\frac{z_1}{z_2^{\,2}}\in R$，則$|z_1|$=

4

$\boxed{8}$ $\mathrm{Arg}(z_1)-2\mathrm{Arg}(z_2)=3\mathrm{Arg}(z_1)=180°\cdot k$ $k=\pm1,\pm2,0$(不合) $\Rightarrow\mathrm{Arg}(z_1)=\pm60°,\pm120°$ $\Rightarrow 4$

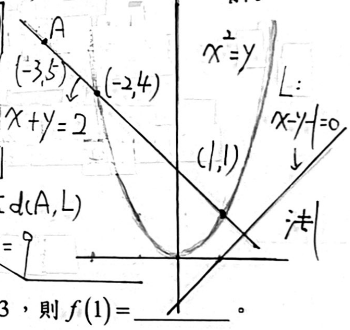
9. 已知函數$f(x)=\sqrt{2\left((x^2-5)^2+(x+3)^2\right)}+(x^2-x+1)$，則$f(x)$的最小值為 $f(x)\ge 2(x^2-x)-7\ge 9$

9

$\boxed{9}$ 法2 $((x^2-5)^2+(x+3)^2)((-1)^2+1^2)\ge(-x^2+x+8)^2$，當 $-x^2+x+8\ge 0$，$f(x)\ge|\sim|+\cdots=9$

當 $-x^2+x+8\le 0$

$\boxed{9}$ $\sqrt{2}d(A,L)=9$



10. 設$f(x)=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，其中$a_i\in\{-1,1\},i=0,1,\cdots,6$，若$f(2)=-53$，則$f(1)$=______。

-1

$\boxed{10}$ $-53=-64+11=-64+32-21=-64+32-16-8+4-2+1$ $-+--+-+$ $\Rightarrow -1$

11. 若a、b、c為多項式方程式$x^3+2025x+1=0$的根，試求$a^3b^2+a^2b^3+b^3c^2+b^2c^3+c^3a^2+c^2a^3$的值為________。

2025

$\boxed{11}$ $a+b+c=0$, $abc=-1$ $a^2b^2(a+b)+b^2c^2(b+c)+c^2a^2(c+a)=-abc(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=2025$

12. 設a,k,m非負整數，且滿足$\frac{4^a+4^{a+k}+4^{a+2k}+\cdots+4^{a+mk}}{2^a+2^{a+k}+2^{a+2k}+\cdots+2^{a+mk}}=1928$，且方程式僅有一組解，試求$(a,k,m)$=________。

(3,4,2)

$\boxed{12}$ $8\cdot 241=4^a((4^k)^{m+1}-1)/(4^k-1)\ /\ 2^a((2^k)^{m+1}-1)/(2^k-1)=2^a\cdot\frac{(2^k)^{m+1}+1}{2^k+1}\in\mathbb{Z}$，令 $t=2^k$ $\Rightarrow m$ is even

$\Rightarrow 2^a(t^m-t^{m-1}\cdots-t+1)$ $\Rightarrow a=3$, $241(t+1)=t^{m+1}+1$

$t(t^m-241)=240$
16 15 $\Rightarrow k=4$, $m=2$
8 30
4 60
120 不合 $\Rightarrow 16^m=256$

13. 試求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{6}{n}\right)^3+\left(\frac{11}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{5k-4}{n}\right)^3+\cdots\left(\frac{5n-4}{n}\right)^3\right]$=

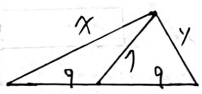
125

$\boxed{13}$ $4\cdot 125\cdot\int_0^1 x^3dx=125$

14. 設有兩個不全等三角形，其面積相同。若每個三角形均有兩邊長為7與9，且其第三邊長為整數，則此兩三角形第三邊長度之和為=

22

$\boxed{14}$



$x^2+y^2=2(81+49)=260=8^2+14^2\Rightarrow 22$

15. 設$a_1=2$，且數列$\langle a_n\rangle$對於所有$n\ge 2$滿足$\frac{a_n-1}{n-1}=\frac{a_{n-1}+1}{n}$，求$\left[\sum_{n=1}^{50}a_n^{\,2}\right]$= ← 高斯

43026

$a_k=k+\frac{1}{k}$

$\sum_{k=1}^{50}(k^2+2+\frac{1}{k^2})\Rightarrow\frac{50\cdot 51\cdot 101}{6}+100=43025$

$na_n=(n-1)a_{n-1}+2n-1$

$\boxed{15}$ 令 $b_n=b_{n-1}+2n-1$

$b_2=b_1+2\cdot 2-1$
$b_3=b_2+2\cdot 3-1$
$\vdots$
$b_n=b_{n-1}+2n-1$

$\Rightarrow b_n=n(n+1)-(n-1)=n^2+1$

$\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\cdots>1$，$\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{k^2}<1+\sum_{k=2}^{50}\frac{1}{(k-1)k}=1+1-\frac{1}{50}<2$

$1<\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{k^2}<2\Rightarrow 43026$ #

1. 已知$a>0$，令矩陣$A=\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$，在座標平面上直線$L_1$的方程式為$y=1$，設$L_1$經矩陣$A$變換後成另一條直線$L_2$，$L_1$經矩陣$A$的反矩陣$A^{-1}$變換後成另一條直線$L_3$，令$L_1$與$L_2$的交點為$P$，$L_1$與$L_3$的交點為$Q$，$L_2$與$L_3$的交點為$R$，$\Delta PQR$的面積為$S(a)$

$\boxed{1}$ $L_1 \underset{A^{-1}}{\overset{A}{\rightleftarrows}} L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+1}\begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+1}\begin{bmatrix} ax'-y' \\ x'+ay' \end{bmatrix}$

$L_1: y=1,\ L_2: x+ay=a^2+1$

$L_1 \underset{A}{\overset{A^{-1}}{\rightleftarrows}} L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax'+y' \\ -x'+ay' \end{bmatrix}$

(1)求L_1與L_2的方程式(2 分)

(2)求P，Q，R的座標(3 分)

$P(a^2-a+1, 1),\ Q(a-1, 1),\ R(\frac{a^2}{2}, \frac{a^2+2}{2a})$

$L_1: y=1$

$L_2: x+ay=a^2+1$

$L_3: -x+ay=1$

$\Rightarrow P(a^2-a+1, 1)$

$Q(a-1, 1)$

$R(\frac{a^2}{2}, \frac{a^2+2}{2a})$

(3)求$S(a)=?$(3 分)

$(a^2-2a+2)^2/4a$

(4)求$\frac{S(a)}{a}$的最小值。(2 分)

$3-2\sqrt{2}$

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a^2-2a+2 & 0 \\ \frac{a^2-2a+2}{2} & \frac{a^2-2a+2}{2a} \end{vmatrix} = \frac{(a^2-2a+2)^2}{4a}$$

$$\frac{(a^2-2a+2)^2}{4a^2} = \frac{1}{4}\left(a+\frac{2}{a}-2\right)^2 \geq \frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}-2\right)^2 = 3-2\sqrt{2}$$

2. 設三次函數$f(x)=x^3-3x^2+2x$，其圖形記為C。對任意實數k（其中$0<k<\frac{1}{2}$），設$P(k,f(k))$為曲線C上一點，並設L_k為曲線C在點P的切線，試回答下列問題：

(1)求切線L_k的方程式。(4 分) $y=(3k^2-6k+2)x-2k^3+3k^2$

(2)切線L_k除了與曲線C於點P相切外，尚與曲線C交於另一點Q，求點Q的x座標。(5 分)

$3-2k$

(3)曲線C與切線L_k所圍的有界區域為$A(k)$，求$A(k)$的最小值。(6 分) $\frac{27}{64}$

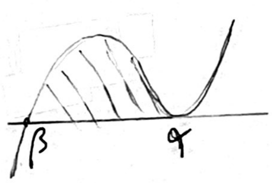
$\boxed{2}$ $y=(3k^2-6k+2)(x-k)+k^3-3k^2+2k$

$=(3k^2-6k+2)x-2k^3+3k^2$

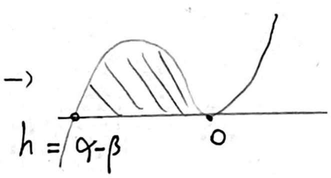
$=x^3-3x^2+2x$

Vieta's formulas

$3=k+k+(3-2k)$



$\rightarrow$



$y=ax^2(x-h)$

$=a(x^3-hx^2)$

$a\int_h^0 x^3-hx^2\,dx = \frac{a}{12}(\alpha-\beta)^4$

$A(k)=\frac{1}{12}(k-(3-2k))^4=\frac{27}{4}(k-1)^4$

當$k=\frac{1}{2}$，$\min=\frac{27}{64}$

Created with Scanner Pro