國立屏東高級中學 115 學年度第 1 次正式教師甄試數學科初試試題

請於空白答案卷上直接作答，並清楚標示大題與題號**。

**本試題總題數為 15 題，配分如各大題所示。

**作答時間為 14:00-16:00，依本校搖鈴聲為準。

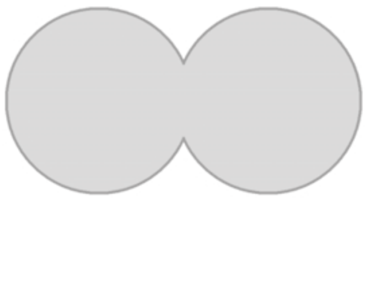
一、 填充題：每題 6 分，共 60 分。
(答案若為分數均需化簡至最簡分數，每題全對才給分。)

1. 小屏閒暇時將面額為 1 元和 2 元兩種郵票貼成一排，考慮其排列順序，設共貼 n 元時有 a_n 種貼法，試求出其遞迴式。

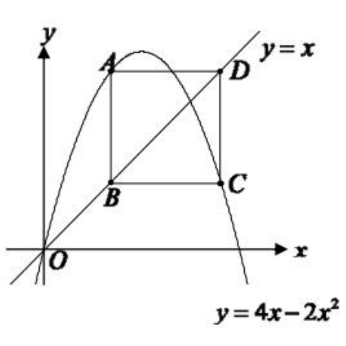
2. 在同一平面上，有一行星繞一恆星運轉，此行星的軌道為 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，另有一飛碟靠近，此飛碟軌道為 $x+y=20$。試求飛碟行進路線與行星軌道的最短距離。

3. 兩列火車在一條軌道上對開，最初兩列火車頭相距 100 公里，而火車的速率是每小時 50 公里。假設有隻蒼蠅，飛行速率是每小時 75 公里。從一列火車頭往前飛，在到達另一列火車的火車頭之後立刻折返飛行，再碰到原先的火車頭之後又立刻折返飛行，則火車相撞的時候，這蒼蠅來來回回，總共飛了_____公里。

4. 半徑為 1 兩個圓相疊如右圖，若相疊後區域周長為 $\frac{11}{3}\pi$，面積為 $a+b\pi$，其中 a,b 均為有理數，試問 $a+b=$_____。



5. 如圖所示，A、C 為二次函數 $y=4x-2x^2$ 上的兩相異點，B、D 為直線 $y=x$ 上的兩相異點，若 $ABCD$ 為正方形，且點 A 的坐標為 (a,b)，試問 $a+b=$_____。



6. 設 k 為實數，使得方程組 $\begin{cases} 10x+\sqrt{6}y=kx \\ 4\sqrt{6}x+12y=ky \\ (x-1)^2+(y-2)^2=1 \end{cases}$ 有實數解，則 $k=$_____。

7. 已知複數 z 滿足 $z-\bar{z}=3i$（其中 $\bar{z}$ 為 z 的共軛複數，$i=\sqrt{-1}$），試求 $\left|\sqrt{11}+5i-z\right|$ 的最小值為_____。

8. 將屏中校歌開頭「美哉屏中美哉屏中」這 8 個字全取排成一列，其中「屏」與「中」兩字不相鄰之排法有_____種。

9. 設 $A(-1,-2)$, $B(3,1)$ 為坐標平面上二點。圓 C 方程式為 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$，若 $P(a,b)$ 為圓 C 上任一點，求 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的最小值為_____。

10. 有 78 個數據依規則排列如下：$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4},\ldots,\frac{1}{12},\frac{2}{12},\ldots,\frac{12}{12}$，則中位數為_____。

二、 計算證明題：每題 8 分，共 40 分。需有詳細過程，僅有答案不予給分。

1. 設 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 均在 $y=x-\frac{1}{3}x^3$ 上，已知以 P,Q 為切點之切線互相平行，且兩直線相距 $\frac{8}{3}$，若 $x_1<x_2$，則以 P 為切點之切線方程式為何。

2. 設正四面體 P-ABC 的高為 $\overline{PO}$，M 為 $\overline{PO}$ 的中點，過 $\overline{AM}$ 作與稜 $\overline{BC}$ 平行的平面，將正四面體截成上下兩部分，令含 P 點的部分為上部分且體積為 m，另一部分體積為 n，試求 $\frac{m}{n}$。

3. $a,b,c\in N$，若 a,b,c 為偶數的機率均為 p，$ab+c$ 為奇數的機率是 $f(p)$，試證明 $f(p)>\frac{1}{2}$ 時，p 的範圍在 $1-\frac{\sqrt{2}}{2}<p<\frac{1}{2}$。

4. 設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $xf(x)=3x^4-2x^3+x^2+\int_1^x f(t)dt$ 對 $x\geq 1$ 恆成立。試回答下列問題：

   (1) 試求 $f(1)$。（1 分）

   (2) 試求 $f(x)$。（3 分）

   (3) 試證明恰有一個大於 1 的正實數 a 滿足 $\int_0^a f(x)dx=1$。（4 分）

5. 在坐標平面上，直線 L 是過原點且斜角為 θ 的直線。若點 $P(x,y)$ 對直線 L 鏡射得點 $P'(x',y')$，即 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=M\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，此時 M 稱為鏡射矩陣，證明鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$。

國立屏東高級中學 115 學年度第 1 次正式教師甄試數學科筆試試題答案

一、 填充題：每題 6 分，共 60 分。

(答案若為分數均需化簡至最簡分數，每題全對才給分。)

1、$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 3 \end{cases}$

2、$\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$

3、75

4、$\dfrac{7}{3}$

5、$\dfrac{5}{2}$

6、$k = 16$

7、$\dfrac{7}{2}$

8、660

9、18

10、$\dfrac{97}{168}$

二、 計算證明題：每題 8 分，共 40 分。需有詳細過程，僅有答案不予給分。

1、$x+y+\frac{4\sqrt{2}}{3}=0$

2、$\frac{4}{21}$

3、略

4、(1) $f(1)=2$

(2) $f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$

(3)因為 $f'(x)=12x^2-6x+2=0$ 無實數解，所以 $f(x)$ 的圖形沒有水平切線．

解 $f''(x)=24x-6=0$，得 $x=\frac{1}{4}$，即 $\left(\frac{1}{4},-\frac{5}{8}\right)$ 為圖形的反曲點．

將 $f(x)$ 的圖形描繪如右．由定積分的幾何意義，

得知 $\int_0^a f(x)\,dx=R_2$ 的面積 $-R_1$ 的面積

其中 R_1 的面積是定值，R_2 的面積隨 a 增大而增大．

因為 $a=1$ 時，$\int_0^1 f(x)\,dx=\left(x^4-x^3+x^2-x\right)\Big|_0^1=0$，

所以必恰有一個大於 1 的正實數 a 使得 $\int_0^a f(x)\,dx=R_2$ 的面積 $-R_1$ 的面積=1

5、[參考證明]

如圖，在坐標平面上，點 $P(x,y)$ 滿足 $\begin{cases} x=r\cos\alpha \\ y=r\sin\alpha \end{cases}$，其中 $r=\overline{OP}>0$。

若 P 點對於直線 L 做對稱後得點 $P'(x',y')$，則 $\overline{OP'}=\overline{OP}=r$，$\overline{OP'}$ 與 x 軸正向的夾角

為 $\theta+(\theta-\alpha)=2\theta-\alpha$，且 x',y' 滿足 $\begin{cases} x'=r\cos(2\theta-\alpha) \\ y'=r\sin(2\theta-\alpha) \end{cases}$。

利用差角公式展開，得 $\begin{cases} x'=r(\cos2\theta\cos\alpha+\sin2\theta\sin\alpha)=x\cos2\theta+y\sin2\theta \\ y'=r(\sin2\theta\cos\alpha-\cos2\theta\sin\alpha)=x\sin2\theta-y\cos2\theta \end{cases}$。

故可用矩陣表示為 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos2\theta & \sin2\theta \\ \sin2\theta & -\cos2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。