

一、設 a, b, c 為正實數，且滿足 $a+b+c=4$ ，試求 $(a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2 + (c+\frac{1}{c})^2$ 的最小值。 115 翔大附中

$\frac{625}{48}$ 令 $f(x) = (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + x^{-2} + 2$ $\frac{1}{3}(f(a) + f(b) + f(c)) \geq f(\frac{a+b+c}{3})$

$f'(x) = 2x - 2x^{-3}$, $f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} > 0, \forall x > 0$ \Rightarrow 當 $a=b=c$ 時, $\min = 3f(\frac{4}{3}) = \frac{625}{4}$

$\Rightarrow f$ is convex on \mathbb{R}^+ \cup

二、某租借站的車輛借用狀況遵循以下規則：若當天有車，隔天無車的機率為 $\frac{1}{4}$ ；若當天無車，隔天無車的機率為 $\frac{1}{2}$ 。假設第 1 天該站有車可借，我們觀察該站的每日車輛狀況序列，

定義隨機變數 X 為滿足以下條件的最小正整數：第 X 天與第 $X+1$ 天皆無車可借。試求 X

的期望值。 令 $E_A =$ 出現 A 後，第一次出現 B 的期望值

法 2: 賭徒進場法

法 1: $A \begin{cases} \frac{3}{4} \rightarrow A \\ \frac{1}{4} \rightarrow B \end{cases}$ $E_B = \sim B$ \sim

$B \begin{cases} \frac{1}{2} \rightarrow A \\ \frac{1}{2} \rightarrow B \end{cases}$ $E_A = \frac{3}{4}(1+E_A) + \frac{1}{4}(1+E_B)$ $E_B = \frac{1}{2}(1+E_A) + \frac{1}{2} \cdot 1$

$\Rightarrow \begin{cases} E_A = 4 + E_B \\ E_B = 2 + E_A \end{cases} \Rightarrow E_A = 10$

$A \xrightarrow{B} B \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 8$

$B \rightarrow \frac{1}{2} = 2$

三、設 $\triangle ABC$ 的內部一點 P ，已知 $\overline{AB}=6, \overline{AC}=4, \overline{AP}=2, \angle BAC=60^\circ$ ，

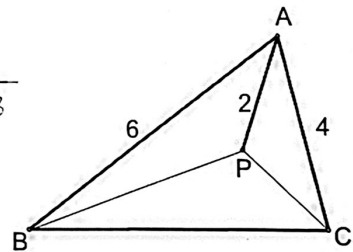
且點 P 在 $\angle BAC$ 的平分線上，如右圖所示。試回答下列問題：

(1) 求向量內積 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = ?$ (4分) $\frac{16-10\sqrt{3}}{2}$ $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}) = 16 - 10\sqrt{3}$

(2) 若點 K 滿足 $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AP} + z\overrightarrow{AC}$ ，其中 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ，

且 $x+y+z=1$ ，求動點 K 所成的集合之面積？ (6分)

(2) $\triangle BPC = \frac{1}{2}(6 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{2} \cdot 10 = 6\sqrt{3} - 5$



四、設對所有的正數 x ， $f(x)$ 滿足 $f(3x) = 3f(x)$ ，且函數 $f(x)$ 在 $1 \leq x \leq 3$ 時滿足 $f(x) = 1 - |x-2|$ ，則

(1) 求 $f(2026)$ 之值？ $\frac{16}{3^6}$ (4分)

(2) 求滿足 $f(x) = f(2026)$ 的最小正數 $x = ?$ (6分)

$f(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x < 2 \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ $3^6 = 729$ $f(\frac{2026}{729}) = 3^6 f(\frac{2026}{729}) = 3^6 (3 - \frac{2026}{3^6}) = 2 \cdot 8^7 - 2026 = 161$

