2003 *AIME*

A-1: 設有三個正整數的乘積 N 是這三個正整數之和的六倍，且其中一個數是另外兩個數的和，則 N 的所有可能值之和為何？

A-2: 設 N 表每一位數上之數字皆相異的正整數，且為 8 的最大整數倍數，則 N 除以 1000 所得餘數是多少？

A-3: 定義一個”好字”為只由三個字母 A，B，C 所組成的序列(A，B，C 不必全部出現在序列中)，其中 A 不能緊接在 B 之後，B 不能緊接在 C 之後且 C 不能緊接在 A 之後。試問七個字母的”好字”共有多少個？

A-4: 在一個正四面體中，以其四個面的中心做為頂點可形成一較小的四面體。若小四面體與大四面體的體積之比值為 $\frac{m}{n}$，其中 m 與 n 為互質之正整數，則 $m+n$=？

A-5: 一圓柱形的木頭其直徑為 12 吋，利用兩次貫穿此木頭的平面切割，可得一個楔形木塊，第一次切割垂直此圓柱形木頭的中心線，第二次切割所在平面與第一次切割所在的平面所夾的二面角為 45^o, 且此二平面之交線與圓柱形木恰交於一點，設所得楔形木塊的體積為 $n\pi$ 立方吋，其中 n 為正整數，試求 n

A-6: 在△ABC 中，$\overline{AB}=13$，$\overline{BC}=14$，$\overline{AC}=15$，且 G 為三中線的交點。若以 G 為中心，將△ABC 旋轉 180^o 後，A，B，C 三點分別移動到 A'，B'，C'，則△ABC 與△ $A'B'C'$所圍區域之聯集的面積為何？

A-7: 已知菱形 $ABCD$ 中，△ABD 與△ACD 之外接圓半徑分別為 12.5 與 25，試求此菱形的面積。

A-8: 由某兩個等差數列之對應項相乘所得數列為 1440，1716，1848，...，試求此數列的第八項。

A-9: 設多項式 $P(x)=x^6-x^5-x^3-x^2-x$ 且 $Q(x)=x^4-x^3-x^2-1$，已知 z_1，z_2，z_3，z_4為 $Q(x)=0$ 的根，求 $P(z_1)+P(z_2)+P(z_3)+P(z_4)=$？

A-10: 兩個正整數相差 60，它們平方根的和是某個非完全平方之整數的平方根。試問這樣的兩個正整數之和其最大可能值為何？

A-11: △ABC 為一直角三角形，其中 $\overline{AC}=7$，$\overline{BC}=24$ 且∠C 為直角，設 M 為 $\overline{AB}$的中點，且 D 為與 C 在 $\overleftrightarrow{AB}$同側的一點，使得 $\overline{AD}=\overline{BD}=15$。若將△$CDM$ 的面積表為 $\frac{m\sqrt{n}}{p}$，其中 m，n，p 為正整數，m 與 p 互質，且 n 不可被任何質數的平方所整除。試求 $m+n+p$ 之值

A-12: 一委員會的委員們正從 27 位候選人中選拔一位會長，每位委員只能從這些候選人中選一人投一票，若每位候選人的得票百分率(所謂百分率即 a%中之數值 a)皆較其實際得票數至少少 1，則委員會最少有多少位委員？

A-13: 一隻跳蚤在一等邊三角形的三頂點間跳動，每次跳動可隨機由一頂點跳到其他兩頂點中的一個，若此跳蚤從某一頂點開始跳動，經過十次跳動後會回到原來頂點的機率為 $\frac{m}{n}$，其中 m，n 為互質的正整數，試求 $m+n$ 之值

A-14: 令 $A(0,0)$, $B(b,2)$表坐標平面上兩點且 $ABCDEF$ 表凸等邊六邊形，$\angle FAB = 120^o$，$\overline{AB} // \overline{DE}$, $\overline{BC} // \overline{EF}$, $\overline{CD} // \overline{FA}$，且各頂點之 y 軸坐標為集合$\{0,2,4,6,8,10\}$中的相異元素。設六邊形的面積可表為 $m\sqrt{n}$之形式，其中 m，n 為正整數，且 n 不可被任何質數的平方所整除。試求 $m+n=$？

A-15: 設 $P(x) = 24x^{24} + \sum_{j=1}^{23}(24-j)(x^{24-j} + x^{24+j})$，令 z_1， z_2， …， z_r 為 $P(x)=0$的所有相異的根，並令 $z_k^2 = a_k + b_k i$ $(k=1,2,\ldots,r)$，其中 $i=\sqrt{-1}$，且 a_k 與 b_k 為實數。設 $\sum_{k=1}^{r}|b_k| = m + n\sqrt{p}$，其中 m，n，p 為整數，且 p 不可被任何質數的平方所整除，試求 $m+n+p$ 之值

解答：

336；120；192；028；216；
112；400；348；006；156；
578；134；683；051；015；

AIME 參考解答

A-1: 設三正整數為 a,b,c 且 $a<b<c$ ➔ $\begin{cases} abc=6(a+b+c) \\ c=a+b \end{cases}$ ➔ $ab(a+b)=12(a+b)$ ➔ $ab=12$

➔ $(a,b,c)=(1,12,13)$ 或 $(2,6,8)$ 或 $(3,4,7)$ $\therefore$ 可能值之總和為 156+96+84=336

A-2: 設 N 為……□□□ $\because N$ 為 8 的最大整數倍數➔數字大者放在前面之位數

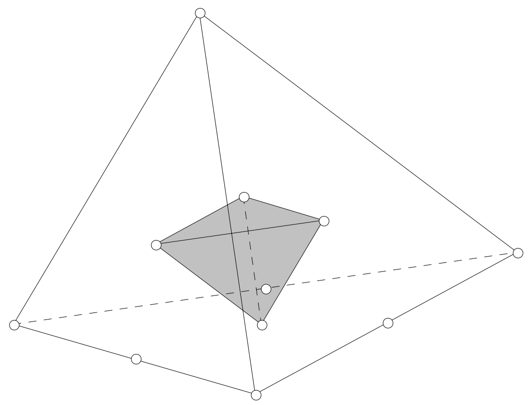
➔其末 3 位為最小的 0,1,2 三數所組成➔末 3 位□□□為 120

➔N 除以 1000 之餘數為 120

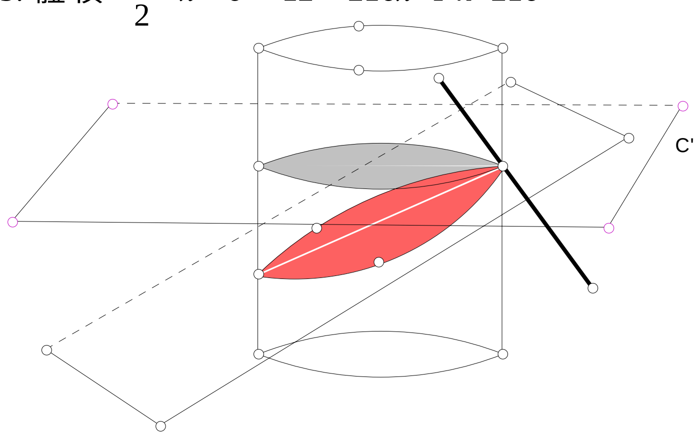
A-3: 針對每一個位置去討論 A、B、C 之選法➔共有 $3\times2\times2\times2\times2\times2\times2=192$

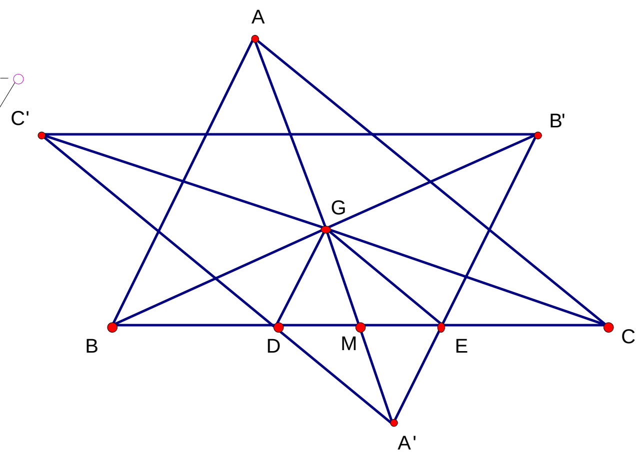
A-4: 思維：體積比等於邊長之立方比；設原正四面體之稜長為 l

➔ $\overline{EF}=\frac{1}{2}l$ ➔ $\overline{GH}=\frac{2}{3}\overline{EF}=\frac{1}{3}l$ ➔ $\therefore$ 體積之比值為 $(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$



A-5: 體積 $=\frac{1}{2}\times\pi\times6^2\times12=216\pi$ ➔ $n=216$





A-6: $\overline{DE}$ 與 $\overline{GA'}$ 互相平分➔四邊形 $GDA'E$ 為平行四邊形

➔$\Delta A'DE=\Delta GDE$ 又 D,E 為 $\overline{BC}$ 的三等分點➔$\Delta GDE=\frac{1}{3}\Delta GBC$➔$\Delta A'DE=\frac{1}{3}\Delta GBC$

➔$(\Delta ABC)\cup(\Delta A'B'C')=(\Delta ABC)+(\frac{1}{3}\Delta ABC)=\frac{4}{3}\Delta ABC=\frac{4}{3}\times84=112$

A-7: 公式：$\Delta=\dfrac{abc}{4R}$，$\Delta ACD=\dfrac{a^2c}{4\times 25}=\dfrac{a^2b}{4\times 12.5}=\Delta ABD=\dfrac{1}{4}bc$

➔$b=2c$ 且 $a^2=12.5c$ 又 $a^2=\dfrac{1}{4}(b^2+c^2)$

➔$b=20$，$c=40$∴面積為 $\dfrac{1}{2}\times 20\times 40=400$

A-8: 設兩等差數列為 $\begin{matrix} x & x+a & x+2a & \cdots \\ y & y+b & y+2b & \cdots \end{matrix}$

➔$xy=1440$，$bx+ay+ab=276$，$bx+ay+3ab=132$➔$ab=-72$，$bx+ay=348$

➔第八項為 $(x+7a)(y+7b)=xy+7(bx+ay)+49ab=348$

A-9: $P(z_1)=z_1^6-z_1^5-z_1^3-z_1^2-z_1=z_1^2-z_1+1(\because Q(z_1)=0)$，

同理可得 $P(z_2)=z_2^2-z_2+1$，$P(z_3)=z_3^2-z_3+1$，$P(z_4)=z_4^2-z_4+1$

➔ $P(z_1)+P(z_2)+P(z_3)+P(z_4)=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2-z_1-z_2-z_3-z_4+4=6$

A-10: 設兩正整數為 a，2➔ $\begin{cases} a-b=60 \\ N=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab} \end{cases}$ ➔ $N=2b+60+2\sqrt{b^2+60b}$

令 $b^2+60b=m^2$➔$(b+30+m)(b+30-m)=900$➔ $\begin{matrix} b+30+m & 450 & 150 & 90 & 50 \\ b+30-m & 2 & 6 & 10 & 18 \end{matrix}$

其中(450,2)，(50,18)這兩組不合∵會造成 N 為完全平方數

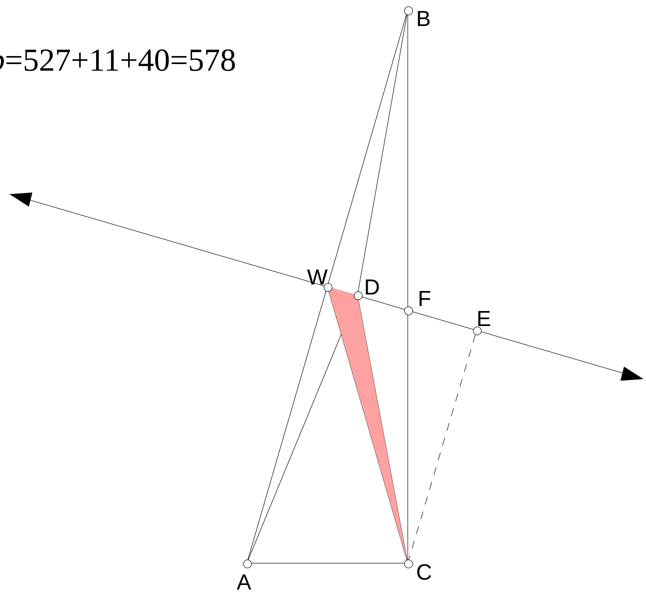
➔$b=48$，$a=108$∴$a+b$ 之最大值為 108+48=156

A-11: $\overline{MD}=\sqrt{15^2-(\dfrac{25}{2})^2}=\dfrac{5\sqrt{11}}{2}$➔$\Delta ADM=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{25}{2}\times\dfrac{5\sqrt{11}}{2}=\dfrac{125}{8}\sqrt{11}$

令 $\overline{BF}=x=\overline{AF}$ ➔ $\overline{AF}^2=\overline{AC}^2+\overline{CF}^2$ ➔ $x^2=(24-x)^2+7^2$ ➔ $x=\dfrac{625}{48}$

➔ $\overline{BM}:\overline{CE}=625:527$ 又 $\Delta ADM=\Delta BDM$ 且 ΔADM：$\Delta CDM=\overline{BM}:\overline{CE}=625:527$

➔$\Delta CDM=\dfrac{527}{625}\times\dfrac{125}{8}\sqrt{11}=\dfrac{527}{40}\sqrt{11}$➔$m+n+p=527+11+40=578$



A-12: 設 27 位候選人之得票數分別為 $a_1, a_2, \cdots, a_{27}$ 並設共有 x 位委員

$\Rightarrow a_k - \dfrac{a_k}{x} \times 100 \geq 1 \Rightarrow a_k \geq \dfrac{x}{x-100}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{27} a_k \geq \sum_{k=1}^{27} \dfrac{x}{x-100} \Rightarrow x \geq \dfrac{27x}{x-100} \Rightarrow x \geq 127$

$\Rightarrow (\dfrac{127}{27} \approx 4.\sim \because$ 鴿籠原理 $\therefore$ 至少有一人少於 5 票，取 max 4 票

$\dfrac{4}{n} \times 100 \leq 4-1 \Rightarrow n \geq \dfrac{400}{3} \doteq 133.33$，n 的最小值取 134

A-13: 法 1：利用馬 可 夫矩陣概念，得 $M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$， $S_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ 第十次跳回到原來的頂點之狀況為 $M^{10} S_0 = \begin{bmatrix} \frac{342}{1024} \\ \frac{341}{1024} \\ \frac{341}{1024} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow P_{10} = \dfrac{171}{512}$， 即 $m+n$=683

法 2‧利用遞推原理可得 $P_n = (1-P_{n-1}) \times \dfrac{1}{2}$ 且 $P_1 = 0$

$\Rightarrow P_n = \dfrac{1}{3} + (-\dfrac{1}{3})(-\dfrac{1}{2})^{n-1} \Rightarrow P_{10} = \dfrac{171}{512}$

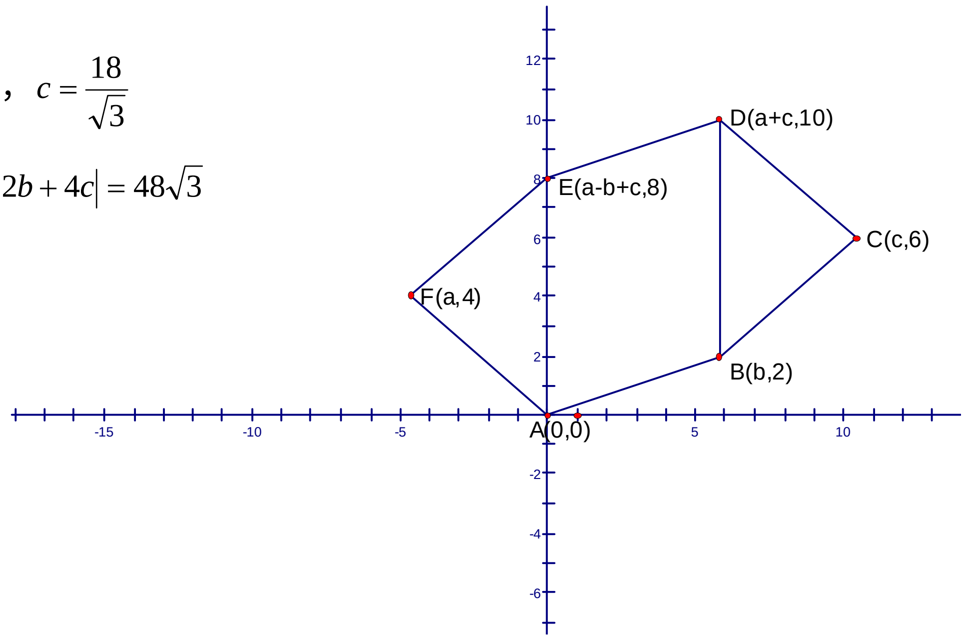
A-14: $\because$ 等邊 $\therefore$ 利用複數極式的概念可得 $(b+2i)(\cos 120° + i \sin 120°) = (\dfrac{-b-2\sqrt{3}}{2}) + i(-1+\dfrac{\sqrt{3}b}{2})$

$\Rightarrow -1 + \dfrac{\sqrt{3}b}{2} = 4$

$\Rightarrow b = \dfrac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \dfrac{-8}{\sqrt{3}}$， $c = \dfrac{18}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\left|-12a + 12b + 4c\right| = 48\sqrt{3}$

$\Rightarrow m+n$=51



A-15: $\because P(x)=24x^{23}+\sum_{j=1}^{23}(24-j)(x^{24-j}+x^{24+j})=\frac{x(x^{24}-1)^2}{(x-1)^2}$，

又 $z_1,z_2,\cdots,z_r$ 為 $P(x)=0$ 的所有 相異的根，r=46

而 $x^{24}-1=0$ 之根為 $\cos\frac{2n\pi}{24}+i\sin\frac{2n\pi}{24}$， n=0,1,2,⋯,23

➔ $Z_k^2=(\cos\frac{k\pi}{12}+i\sin\frac{k\pi}{12})^2=\cos\frac{k\pi}{6}+i\sin\frac{k\pi}{6}$,k=1,2,3,⋯,23

➔ $\sum_{k=1}^{r}|b_k|=2\times\sum_{k=1}^{23}\left|\sin\frac{k\pi}{6}\right|=2\times[4(\sin 30°+\sin 60°)+2]=8+4\sqrt{3}$ ➔m+n+p=15